Лекція №1

Змістовий модуль 1. Лінійна та векторна алгебра.

Тема 1. Матриці та визначники.

п. 1.1. Матриці та дії над матрицями.

Озн. *Матрицею A* розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел – елементів матриці, що містить m рядків та n стовпців.

Матриця *A* розміру $m \times n$ має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots. \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$.

a_{ij} - елемент матриці *A*, який стоїть в i - му рядку і j -му стовпці, $i = 1,\ldots,m;\ \ j = 1,\ldots,n$.

Озн. Матриця *O*, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою матрицею.*

Нульова матриця має вигляд $O = \begin{pmatrix} 00\ldots0 \\ 00\ldots0 \\ \ldots \\ 00\ldots0 \end{pmatrix}$.

Озн. Матрицю *A* називають *квадратною матрицею* порядку n, якщо вона має n рядків і n стовпців.

Квадратна матриця має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots. \\ a_{n1}\, a_{m2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$.

Озн. Елементи квадратної матриці, що стоять на діагоналі, яка іде з верхнього лівого кута у правий нижній, утворюють так звану *головну діагональ.* Елементи квадратної матриці, що стоять на діагоналі, яка іде з верхнього правого кута у лівий нижній, утворюють так звану *побічну діагональ*.

Озн. Квадратна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші елементи дорівнюють 0, називається *одиничною* і позначається *E.*

Одинична матриця має вигляд $E = \begin{pmatrix} 1\,0 \ldots 0 \\ 0\,1 \ldots 0 \\ \ldots \\ 0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix}$.

Озн. Матриці *A* і *B* називаються *рівними*, якщо вони мають однакові розміри і всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою.

Позначення: *A=B*.

Тобто *A=B*, якщо матриці *A* і *B* мають розміри $m \times n$ і $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,\ldots,m;\ \ j = 1,\ldots,n$.

Озн. Сумою матриць *A* і *B* однакових розмірів $m \times n$ називається матриця *C* розміру $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць доданків.

Позначення: *C=A+B*.

Тобто *C=A+B*, якщо $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\ldots,m;\ \ j = 1,\ldots,n$.

Озн. *Добутком* матриці *A* розміру $m\times n$ *на дійсне число* α називається матриця *B* розміру $m\times n$, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці *A* на α.

Позначення: $B=\alpha A$.

Тобто $B=\alpha A$, якщо $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $i=1,...,m;\quad j=1,...,n$.

Операції додавання матриць та множення матриці на число називаються лінійними операціями.

Властивості лінійних операцій над матрицями:

1. $A+B=B+A$.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.
4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
5. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

Озн. *Добутком матриці A* розміру $m\times p$ *на матрицю B* розміру $p\times n$ називається матриця *C* розміру $m\times n$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює добутку і-го рядка матриці *A* і j-го стовпця матриці *B* (під добутком рядка на стовпчик розуміють суму добутків їх відповідних елементів).

Позначення: $C=A\cdot B$.

Тобто $C=A\cdot B$, якщо $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk}$, де $i=1...m,\ k=1...p$.

Властивості операції множення матриць:

1. $(AB)C=A(BC)$.
2. $A(B+C)=AB+AC$.
3. $(A+B)C=AC+BC$.

Зауваження: $AB\neq BA$. Ті матриці, для яких $AB=BA$, називаються комутативними.

Озн. *Транспонуванням* матриці *A* називається перетворення, яке полягає у заміні рядків стовпцями із збереженням номерів.

Позначення: A^T.

Властивості операції транспонування:

1. $(A^T)^T=A$.
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$.
3. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

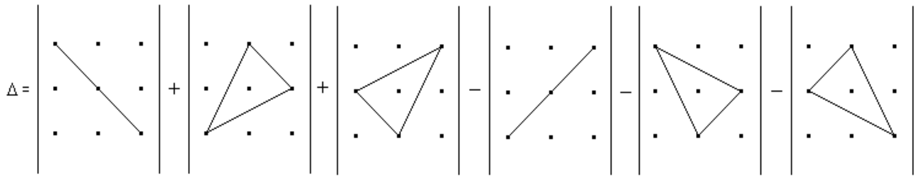
п.1.2. Визначники (детермінанти) та їх властивості.

Нехай *A* – квадратна матриця порядку n. Пов'яжемо з кожною такою матрицею *A* число $|A|$ - визначник цієї матриці – за наступним правилом.

1. Нехай $A=(a_{ij})$, тобто $n=1$. Тоді $|A|=|a_{ij}|=a_{ij}$.
2. Нехай $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, тобто $n=2$. Тоді $\boxed{|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$. **(1)**
3. Нехай $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, тобто $n=3$. Тоді

$$\boxed{|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{33}a_{12}a_{21}}. \quad \textbf{(2)}$$

Вираз (1.2) складений за таким правилом (правилом трикутника): добуток елементів, розміщених вздовж головної діагоналі і два добутки елементів, що стоять у вершинах двох рівнобедрених трикутників із основами паралельними головній діагоналі і з вершинами в протилежному куті, беруться із знаком плюс. Три добутки, що складені за тим же правилом, але відносно побічної діагоналі, беруться із знаком мінус:



Властивості визначників:

1. При транспонуванні визначника його значення не змінюється.
2. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці) визначника, то визначник міняє знак.

Наслідок. Визначник, який має два однакових рядки (стовпці) дорівнює нулю.

3. Спільний множник будь-якого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.

Наслідок 1. Якщо всі елементи рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо всі елементи одного рядка (стовпця) пропорційні відповідним елементам іншого рядка (стовпця), то визначник дорівнює нулю.

4. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) являє собою суму двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, в першому з яких у відповідному рядку стоять перші доданки, а у другому – другі.

Наслідок. Якщо до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на деяке число, то визначник не зміниться.

5. $|AB| = |A||B|$.

6. $|E| = 1$.

Подальші властивості визначників пов'язані з поняттями мінору та алгебраїчного доповнення.

Озн. *Мінором* деякого елемента a_{ij} визначника *n*-го порядку називається визначник *n-1*-го порядку, який отримано з даного шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпця (рядка і стовпця на перетині яких стоїть елемент a_{ij}).

Позначення: M_{ij}.

Озн. *Алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij} визначника називається число A_{ij}, яке обчислюється за формулою

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}. \qquad \textbf{(3)}$$

За допомогою понять мінору та алгебраїчного доповнення можна дати означення визначників вищого порядку (при n>3).

Теорема 1. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на відповідні елементи іншого рядка (стовпця) визначника дорівнює нулю.

Детермінант *n*-го порядку позначають

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для детермінантів n-го порядку залишаються в силі означення мінора і алгебраїчного доповнення елемента детермінанта. Детермінанти n-го порядку мають ті ж властивості, що і детермінанти другого і третього порядку. Для детермінантів n-го порядку справедливі теореми (1) і (2). Зокрема теорему (1) можна сформулювати так: детермінант n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення, тобто для будь-якого i=1, 2, 3, ..., n має місце рівність

$$|A|= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in},$$

яка називається розкладом детермінанта $|A|$ за елементами i-го рядка. Аналогічно для будь-якого k=1,2,3,..., n має місце розклад детермінанта $|A|$ за елементами k-го стовпця

$$|A|=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+...+a_{nk}A_{nk}.$$

Властивість 6 дозволяє звести обчислення детермінанта n-го порядку до обчислення n детермінантів (n-1)-го порядку. Для спрощення обчислень доцільно спочатку перетворити детермінант так, щоб в одному з його рядків (стовпців) всі елементи, крім одного, перетворилися в нуль. Тоді обчислення даного детермінанта зведеться до обчислення одного детермінанта нижчого порядку. Таке перетворення детермінанта можна виконати, спираючись на його властивості, зокрема на наслідок властивості 5.