Лекція №10

Тема 4. Криві другого порядку.

п. 4.1. Вступ. Поняття лінії другого порядку.

Озн. *Лінія другого порядку* – це множина точок , координати яких задовольняють рівняння виду:

$$\boxed{ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0}, \quad (*)$$

де a, b, c, d, e, f - дійсні числа і $a^2+b^2+c^2=0$.

Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс. Гіпербола, парабола.

Щоб відповісти на питання, яке геометричне місце точок визначається рівнянням (*), треба підібрати таку систему координат, в якій це рівняння спростилося б. Відомо, що для будь-якої лінії другого порядку існує прямокутна система координат, в якій рівняння має найпростіший, тобто канонічний вигляд.

п. 4.2. Коло.

Озн. *Колом* називається множина точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнює сталому числу R (радіусу кола).

Нехай центр кола знаходиться в т. $O_1(a,b)$.

Тоді, згідно з означенням, рівняння кола буде:

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$, тобто

$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$ (1) – рівняння кола з центром в т. $O_1(a,b)$ і радіусом R.

Якщо центр кола знаходиться в початку координат, тобто в т. $O(0;0)$, то його рівняння матиме вигляд:

$\boxed{x^2+y^2=R^2}$ - канонічне рівняння кола.

п. 4.3. Еліпс

Озн. *Еліпсом* називається множина точок, для кожної з яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є сале число *2a*, яке більше за відстань *2c* між фокусами.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси еліпса розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c, 0)$ і $F_2(-c, 0)$, то в цій системі координат рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (2)$$

де $\boxed{b^2=a^2-c^2}$.

Рівняння (8.1) називається канонічним рівнянням еліпса.

При такому виборі системи координат осі координат збігаються з осями симетрії еліпса, а початок координат - з центром симетрії еліпса. Точки перетину еліпса з осями координат $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ називаються вершинами еліпса. Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, що з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їх довжини *2a* і *2b*, називаються відповідно великою (фокальною) та малою осями еліпса. Параметри *a* та *b*, які входять у рівняння еліпса (2), дорівнюють його півосям.

Форма еліпса (міра його стиску) характеризується його ексцентриситетом:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c<a$, то $0 \le \varepsilon < 1$. У частинному випадку, коли $a=b$ ($c=0$, $\varepsilon = 0$), еліпс перетворюється в коло, рівняння якого має вигляд $x^2+y^2=a^2$.

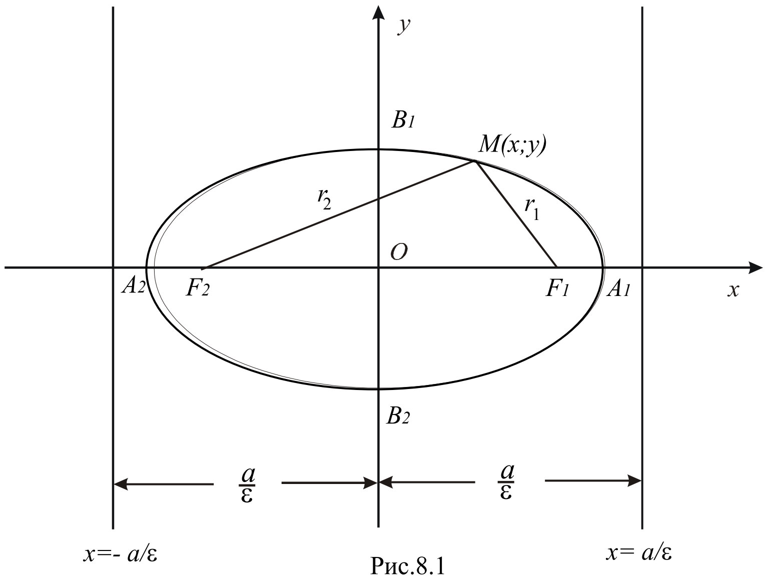

Рис.8.1

Відстані $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів називаються фокальними радіусами точки M. З означення еліпса випливає, що $r_1+r_2=2a$. Фокальні радіуси можуть бути обчислені за формулами

$$r_1 = a - \varepsilon x; \quad r_2 = a + \varepsilon x,$$

де x - абсциса точки M.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, паралельні малій осі, які віддалені від неї на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$ (коло директрис не має).

Рівняння директрис мають вигляд $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Теорема 8.1. Якщо r - відстань від довільної точки еліпса до деякого фокуса, d - відстань цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε еліпса, тобто

$$\boxed{\frac{r}{d} = \varepsilon}.$$

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точці $M(x_1, y_1)$ еліпса має вигляд:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Якщо в декартовій прямокутній системі координат фокуси еліпса розташовані на прямій $y=y_0$, симетрично відносно прямої $x=x_0$, в точках $F_1(x_0+c;\, y_0)$ і $F_2(x_0-c;\, y_0)$, то рівняння еліпса набуде вигляду:

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1.$$

п. 4.4. Гіпербола

Озн. *Гіперболою* називається множина точок, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є стале додатне число $2a$, яке менше за відстань $2c$ між фокусами.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси даної гіперболи розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c, 0)$ і $F_2(-c, 0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3)$$

де $\boxed{b^2=c^2-a^2}$.

Рівняння (3) називається канонічним рівнянням гіперболи.

При такому виборі системи координат осі координат збігаються з осями симетрії гіперболи, а початок координат - з її центром симетрії (рис.8.2). Точки $A_1(a, 0)$ і $A_2(-a, 0)$ називаються вершинами гіперболи, а точки $B_1(0, b)$ і $B_2(0, -b)$ - уявними вершинами гіперболи. Відрізок A_1A_2 і його довжина $2a$ називається дійсною віссю, а відрізок B_1B_2 і його довжина $2b$ - уявною віссю гіперболи.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстані між фокусами до дійсної осі:

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}} \quad \text{(оскільки } c>a\text{, то } \varepsilon>1\text{)}.$$

Відстані $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ від будь-якої точки гіперболи $M(x; y)$ до фокусів називаються фокальними радіусами точки M. З означення гіперболи випливає, що $|r_1-r_2|=2a$.

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ правої вітки гіперболи обчислюються за формулами

$$\boxed{r_1=MF_1=\varepsilon x-a; \quad r_2=MF_2=\varepsilon x+a.}$$

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ лівої вітки гіперболи обчислюються за формулами

$$\boxed{r_1=MF_1=-\varepsilon x+a; \quad r_2=MF_2=-\varepsilon x-a.}$$

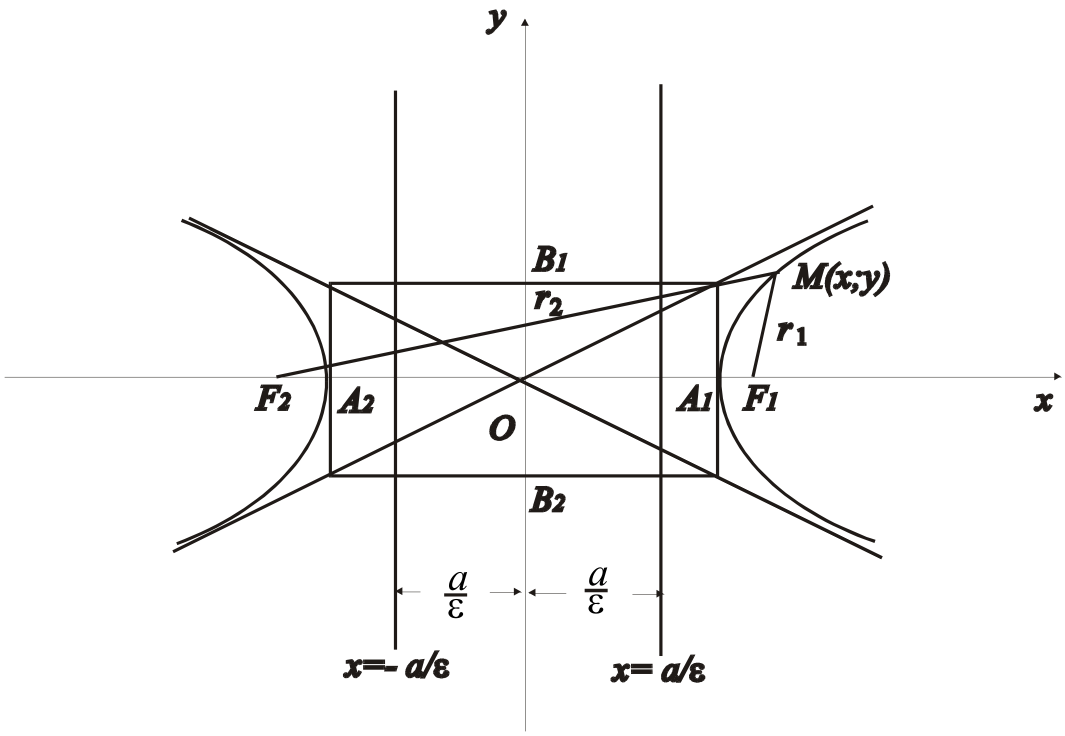

Рис.8.2

Директрисами гіперболи називаються прямі, перпендикулярні до фокальної осі, які віддалені від центра на відстань a/ε. Директриси мають рівняння:

$$\boxed{}.$$

Теорема 8.2. Якщо r - відстань від довільної точки гіперболи до деякого фокуса, d - відстань від цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи $r/d=\varepsilon$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Асимптоти містять діагоналі прямокутника, центр якого збігається з центром гіперболи, а сторони рівні і паралельні осям гіперболи.

Якщо $a=b$, то рівняння гіперболи має вигляд

$$x^2-y^2=a^2.$$

Така гіпербола називається рівнобічною.

Дві гіперболи, визначені в одній системі координат рівняннями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, називаються спряженими. Такі гіперболи мають спільні осі і асимптоти, але дійсна вісь однієї є уявною віссю другої, і навпаки.

Рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точці $M(x_1;y_1)$ гіперболи має вигляд $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Якщо осі декартової системи координат вибрані так, що фокуси гіперболи розташовані на прямій $y=y_0$ симетрично відносно точки $M_0(x_0;\ y_0)$ в точках $F_1(x_0+c;\ y_0)$ і $F_2(x_0-c;\ y_0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

8.1.3. Парабола

Озн. *Параболою* називається множина точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини, що називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою.

Відстань p від фокуса параболи до її директриси називається *параметром параболи.*

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус знаходиться в точці $F(p/2,\ 0)$, а директриса перпендикулярна до осі OX і має рівняння $x=-\frac{p}{2}$, то рівняння параболи має вигляд

$$\boxed{y^2=2px} \quad (4)$$

Рівняння (4) називається канонічним рівнянням параболи.

Парабола має одну вісь симетрії, вісь симетрії параболи називається віссю параболи. Точка перетину параболи з віссю симетрії називається її вершиною. Для параболи, яка задана рівнянням (4), віссю симетрії є вісь OX, а вершиною - початок координат

Фокальний радіус r довільної точки $M(x,\ y)$ параболи (тобто довжина відрізка FM) може бути обчислений за формулою

$$r=x+p/2,$$

де x - абсциса точки M.

Якщо директриса параболи - пряма $x=p/2$, а фокус - точка $F(-p/2,\ 0)$, рівняння параболи має вигляд $y^2=-2px$. У випадку, якщо директриса параболи - пряма $y=-p/2$, а фокус - точка $F(0,\ p/2)$ рівняння параболи має вигляд $x^2=2py$.

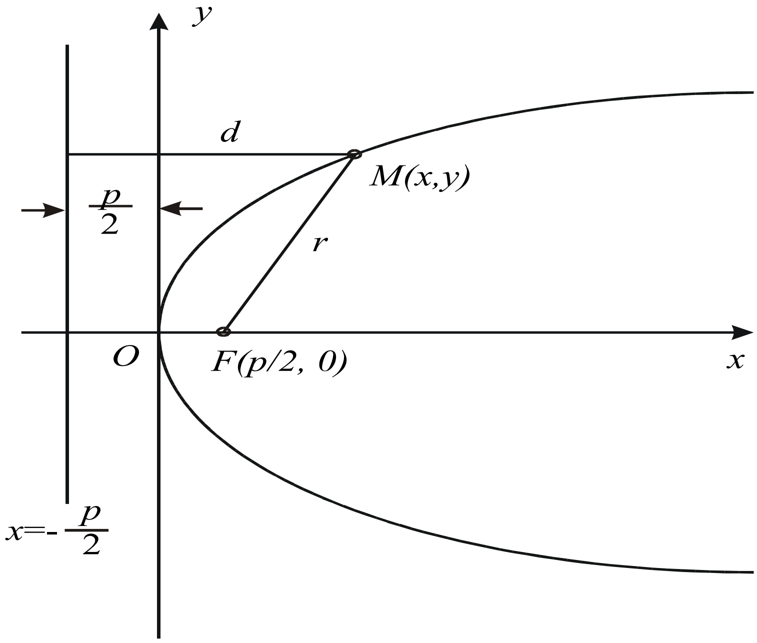

Рис.8. 3

Рівняння дотичної до параболи $y^2=2px$ в точці $M(x_1;y_1)$ параболи має вигляд

$$yy_1=p(x+x_1).$$

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус параболи знаходиться в точці $F(x_0+p/2;y_0)$, а директриса перпендикулярна до осі OX і має рівняння $x=x_0-p/2$, то рівняння параболи має вигляд

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Зауваження. Нехай r - відстань від довільної точки параболи до фокуса (фокальний радіус), d - відстань від цієї ж точки до директриси. Тоді за означенням параболи $r=d$. Звідси згідно з твердженням теорем 8.1 та 8.2 вважають, що ексцентриситет параболи $\varepsilon=r/d=1$.