Лекція №11

Змістовий модуль 3. Вступ до математичного аналізу.

Тема 1. Функція одного аргументу.

п. 1.1. Дійсне число.

Нехай на прямій вибрано одиницю масштабу. Тоді кожний відрізок прямої має довжину.

Озн. Число, яке дорівнює довжині відрізка прямої або довжині відрізка прямої зі знаком мінус, називається *дійсним числом*.

Озн. *Віссю* називається пряма на якій вибрано початок – точку *O*, одиницю масштабу і напрям.

Вісь позначається через Ox (або Oy, Oz і т. п.).

Вісь визначається заданням початку *O* і одиничного вектора $\vec{i}$, який має довжину рівну одиниці і такий же напрям, як і вісь.

Озн. *Координатою* x довільної точки M осі Ox називається дійсне число, яке визначається рівністю $\overline{OM} = x\vec{i}$.

Твердження. Кожній точці M осі Ox однозначно відповідає дійсне число x рівне її координаті і, навпаки, кожному дійсному числу x однозначно відповідає на осі Ox точка M, для якої x є координатою.

З цього твердження випливає, що точку M осі Ox можна ототожнювати з дійсним числом x, яке є координатою точки M на осі Ox. Тому в математичному аналізі точку на осі Ox позначають через x, а вісь Ox називають числовою прямою. Зображення дійсних чисел у вигляді точок осі Ox упорядковує множину дійсних чисел. Рівність $x_1 = x_2$ рівносильна рівності $\overline{x_1x_2} = \overline{0}$, а нерівність $x_1 < x_2$ рівносильна тому, що напрям вектора $\overline{x_1x_2}$ співпадає з напрямом осі Ox.

Озн. *Модулем* (абсолютною величиною) числа x називається відстань від точки x до точки *O*, тобто довжина вектора $\overline{Ox}$.

Модуль числа x позначається $|x|$. За означенням $|x| = |\overline{Ox}|$.

Зауважимо, що:

$$|x| = 0 \text{, якщо } x = 0;$$

$$|x| = x \text{, якщо } x > 0;$$

$$|x| = -x \text{, якщо } x < 0.$$

У множині дійсних чисел розглядають множину натуральних, раціональних і ірраціональних чисел.

Озн. *Натуральним числом* називається ціле додатне число.

Озн. Дійсне число називається *раціональним*, якщо воно є відношенням двох цілих чисел (ціле число, що знаходиться у знаменнику, не дорівнює нулю).

Наприклад, $\frac{3}{5}, \frac{21}{4}, 3 = \frac{3}{1}$.

Дійсне число, яке не є раціональним, називається *ірраціональним*. Дійсне число називають *скаляром* або *скалярною величиною*

п. 1.2 Змінна величина. Поняття функції

Нехай X – деяка множина точок на осі Ox.

Озн. Величина x називається *змінною величиною* або *змінною* з областю визначення X, якщо її можливі значення співпадають з множиною X.

У математичному аналізі як правило розглядають такі області визначення змінної x:

$X=[a,b]$ - множина точок x, для яких $a \le x \le b$;

$X=[a,b)$ - множина точок x, для яких $a \le x < b$;

$X=(a,b]$ - множина точок x, для яких $a < x \le b$;

$X=(a,b)$ - множина точок x, для яких $a < x < b$;

$X=(a,+\infty)$ - множина точок x, для яких $a < x$;

$X=[a,+\infty)$ - множина точок x, для яких $a \le x$;

$X=(-\infty,b)$ - множина точок x, для яких $x < b$;

$X=(-\infty,b]$ - множина точок x, для яких $x \le b$;

$X=(-\infty,+\infty)$ - множина всіх точок x числової вісі.

Якщо x – змінна із областю зміни X, то пишуть $X=\{x\}$.

Озн. Якщо X складається з однієї точки x, змінну x називають *сталою величиною*.

Нехай задані дві змінні $X=\{x\}$, $Y=\{y\}$.

Озн. Змінна y називається *функцією* від змінної x в області її зміни X, якщо за деяким правилом кожному значенню x із X ставиться у відповідність одне значення змінної y із Y.

Змінну x називають незалежною змінною або *аргументом функції*.

Область X зміни аргументу x називають *областю визначення функції*.

Область Y зміни y називають *областю значень функції*.

Якщо y є функцією від x, то цей факт записують у вигляді

$$y=f(x), \text{ або } y=y(x),\ y=h(x),\ y=\psi(x) \text{ і т.д.}$$

Основним способом задання функції в математичному аналізі вважається аналітичний спосіб, за яким функція задається за допомогою формули.

Приклади аналітичного задання функції:

$$y=x^2-x+2,\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=\frac{2}{1+\sqrt{x}}.$$

У випадку аналітичного задання функції областю її визначення вважають множину X всіх тих дійсних значень x, при яких y є дійсне число.

Задача. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{4-x}+\sqrt[3]{\frac{2}{x-3}}+\ln(x-1)$.

Розв'язання. Областю визначення цієї функції є множина значень x, які задовольняють наступну систему: $\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ x-3\ne 0, \\ x-1>0. \end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо область визначення даної функції:

$$x\in(1;3)\cup(3;4].$$

п. 1.3. Графік функції

Важливим засобом задання функції є її графік.

Озн. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. В прямокутній системі координат xOy на осі Ox відмітимо відрізок $[a;b]$ і зобразимо криву AB, для кожної точки $M(x,y)$ якої абсциса x належить $[a;b]$, а ордината y дорівнює $f(x)$. Таку криву AB будемо називати г*рафіком функції* $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Графік визначає функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ наступним чином. Якщо x є довільна точка відрізка $[a;b]$, то відповідне значення $y = f(x)$ визначається як ордината точки M . Рівняння $y = f(x)$ називаються *рівнянням кривої* AB .

Ми задали функцію за допомогою графіка на множині *X*, яка є відрізком $[a;b]$. Але множина *X* може бути інтервалом $(a;b)$ (*a* і *b* можуть бути як скінченні, так і нескінченні).

Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий. Розглянемо деякі перетворення цього графіка.

1. Графік функції $y = f(x) + b$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі на величину, що дорівнює b .

2. Графік функції $y = f(x-a)$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox вправо на величину, що дорівнює a .

3. Графік функції $y = cf(x),\ c \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ за допомогою розтягування в c разів його ординат із збереженням відповідних абсцис. Якщо $c < 0$, то графік $y = cf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -cf(x)$ відносно осі Ox.

4. Графік функції $y = f(kx),\ k \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при $k > 1$ зменшенням в k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат. Якщо $k < 0$, то графік $y = f(kx)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = f(-kx)$ відносно осі Oy.

5. Графік функції $y = f(|x|)$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ симетрично відображуючи відносно осі Oy тієї частини, для якої $x \geq 0$. При цьому частина графіка функції $y = f(x)$, для якої $x < 0$ відкидається.

6. Графік функції $y = |f(x)|$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ симетрично відображуючи відносно осі Ox тієї частини, для якої $y < 0$. Всі інші точки графіка залишаються без змін.

Задача. Шляхом паралельного зміщення даного графіка функції $y = x^2$ побудуйте графік функції $y = (x+2)^2 - 3$.

Розв'язання. Нехай дано графік функції $y = x^2$.
Для побудови графіка функції $y = (x+2)^2 - 3$ послідовно здійснюємо такі перетворення графіка функції $y = x^2$: спочатку паралельно переносимо його вздовж осі Ox на 2 одиниці вліво, отримаємо графік функції $y = (x+2)^2$, а потім паралельно переносимо вздовж осі Oy на 3 одиниці вниз.

1.4. Основні елементарні функції. Елементарна функція.

Основними елементарними функціями називають такі функції.

1. **Степенева функція** $y = x^{\alpha}$ **,** $\alpha \in R$.

Область визначення цієї функції та її графік залежать від значення α (рис. 11(а)–(й)).

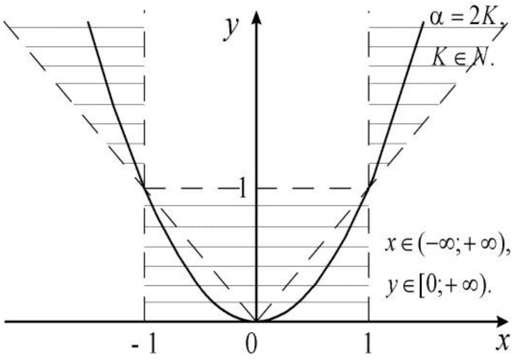

Рис. 11(а)

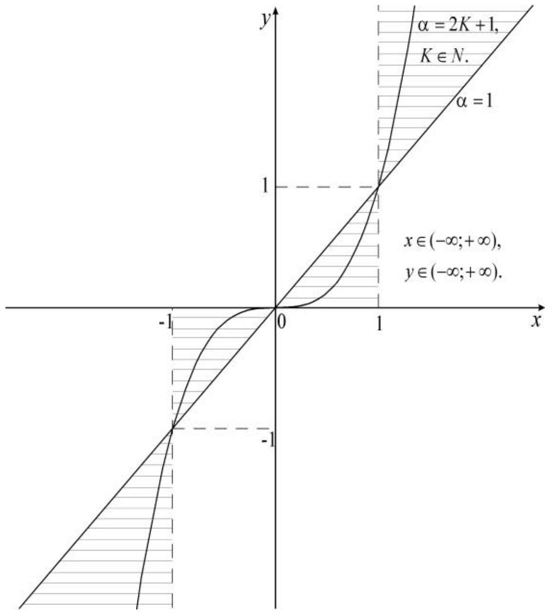

Рис. 11(б)

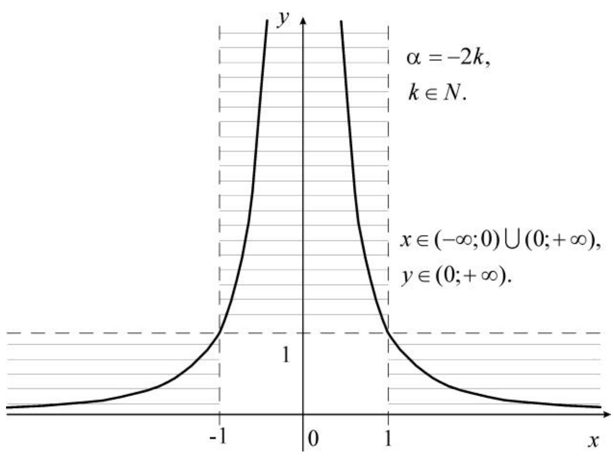

Рис. 11(в)

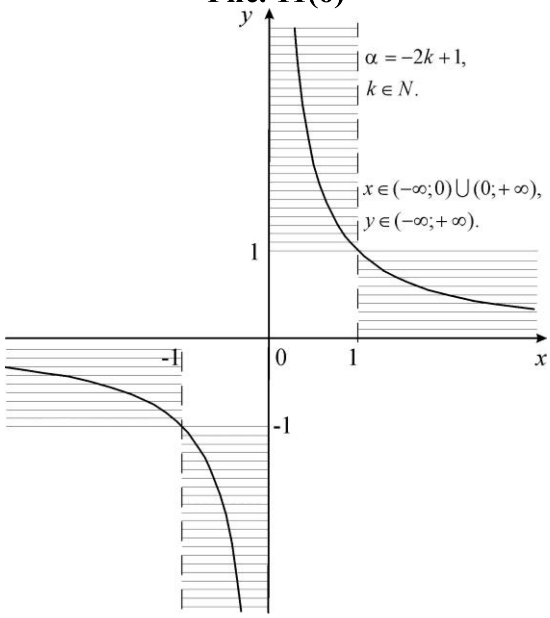

Рис. 11(г)

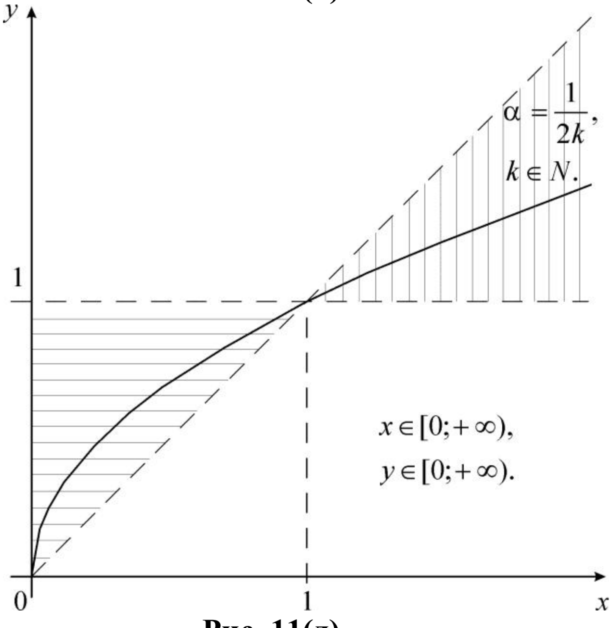

Рис. 11(д)

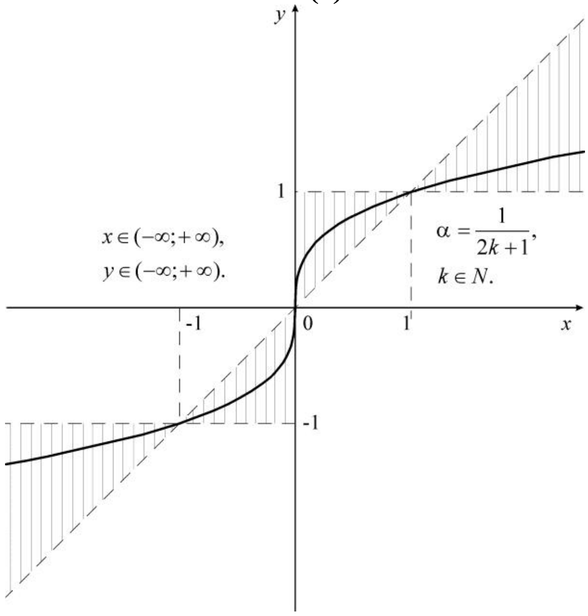

Рис. 11(е)

$\alpha = \dfrac{m}{n}$, m і n – взаємно прості натуральні числа.

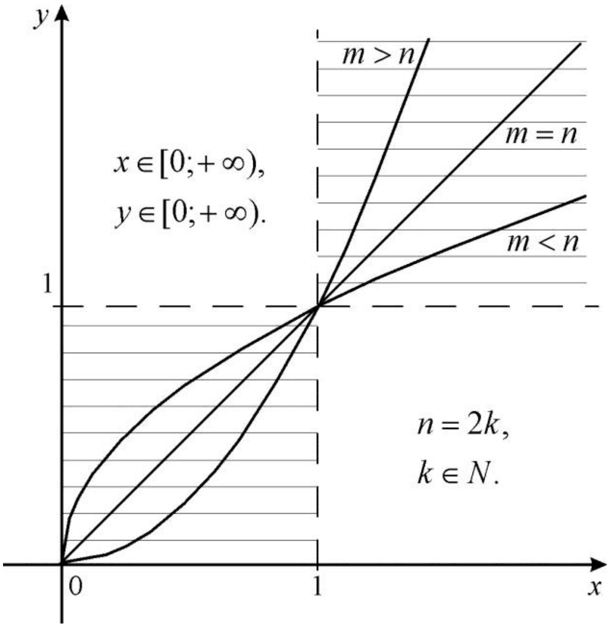

Рис. 11(є)

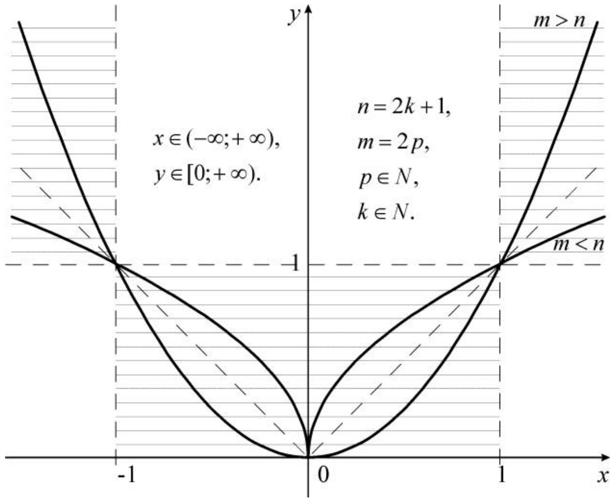

Рис. 11(ж)

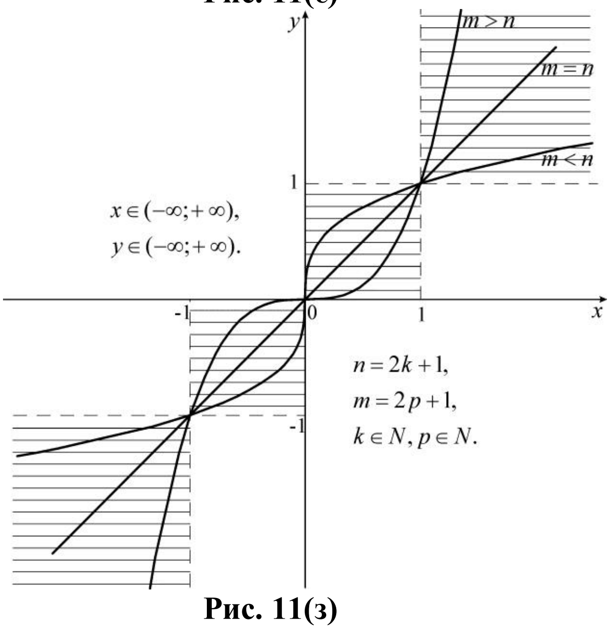

Рис. 11(з)

$\alpha = -\dfrac{m}{n}$, m і n – взаємно прості натуральні числа.

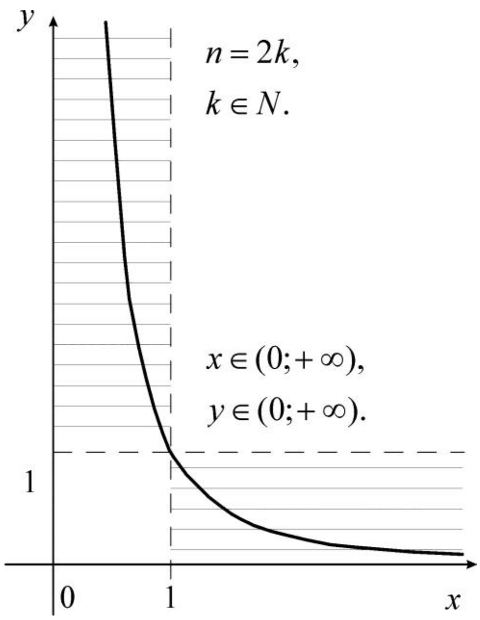

Рис. 11(і)

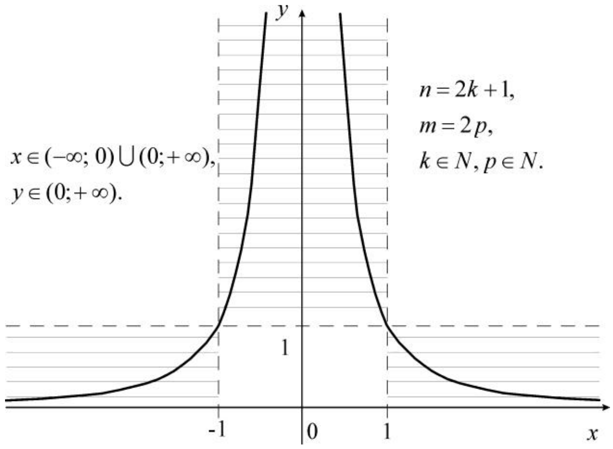

Рис. 11(и)

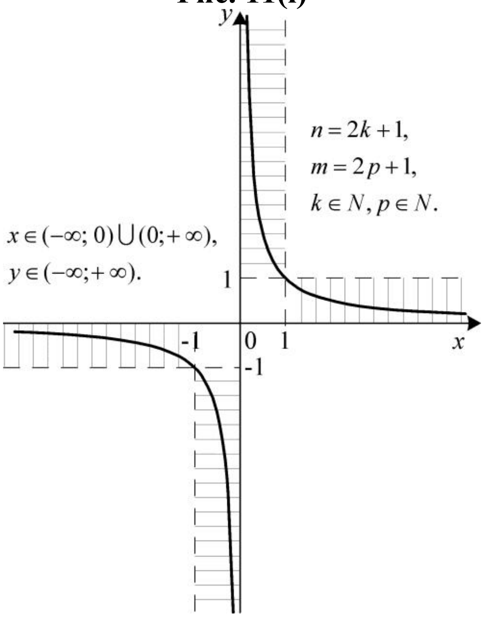

Рис. 11(й)

2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in R$

Графіки показникової функції зображено на рис. 12 (а)–(б).

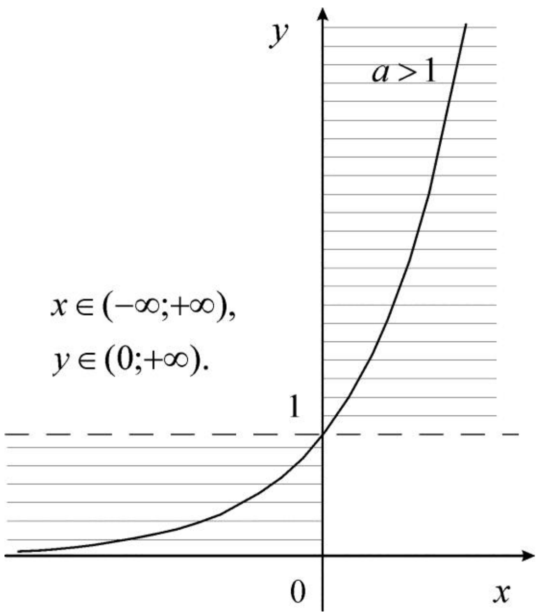

Рис. 12(а)

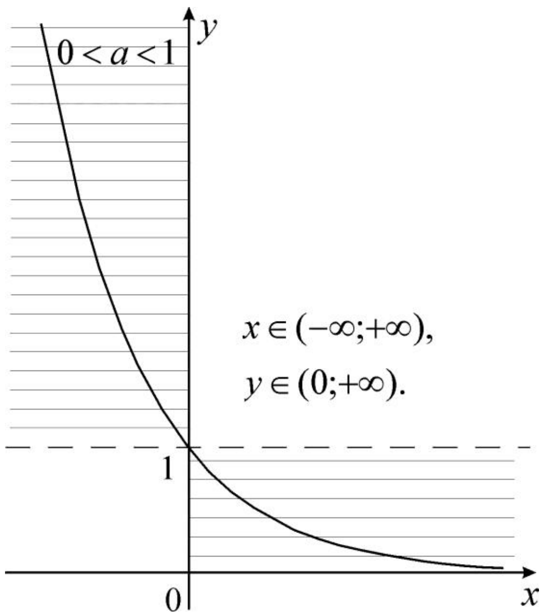

Рис. 12(б)

3. **Логарифмічна функція** $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \in R.$

Графіки логарифмічної функції зображено на рис. 13(а)–(б).

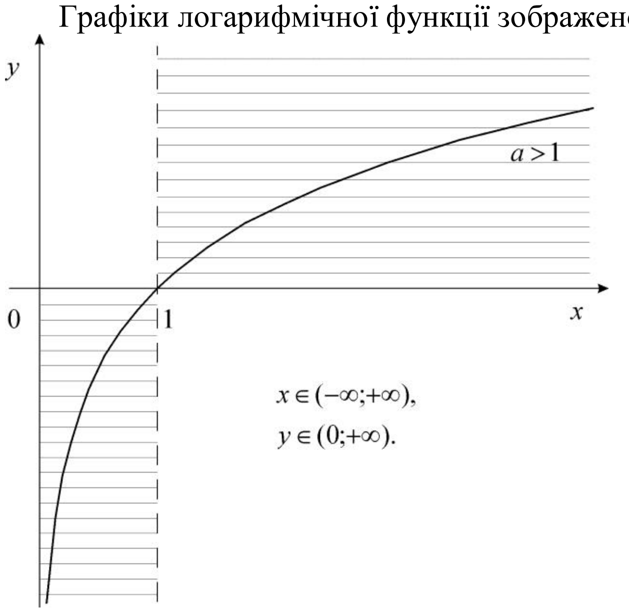

Рис. 13(а)

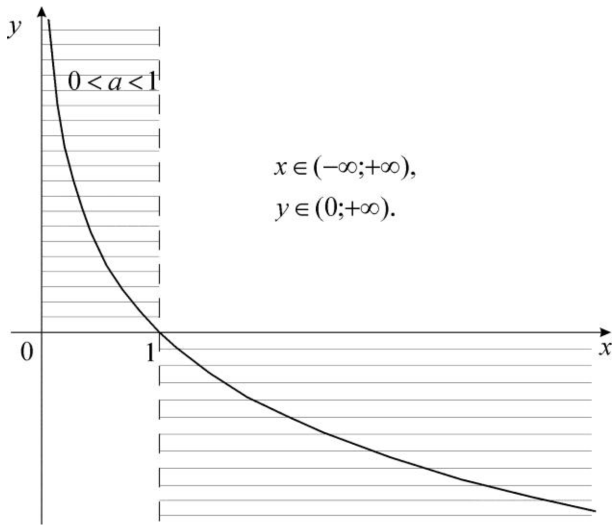

Рис. 13(б)

4. **Тригонометричні функції:** $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x.$

Графіки тригонометричних функцій зображено на рис. 14(а)–(г). (рис. 4(а)–(г)).

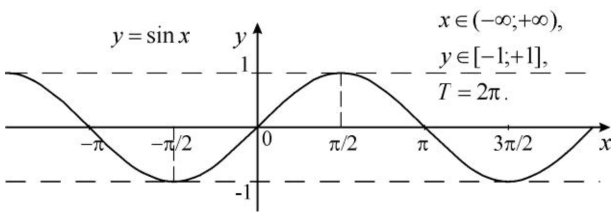

Рис.14(а)

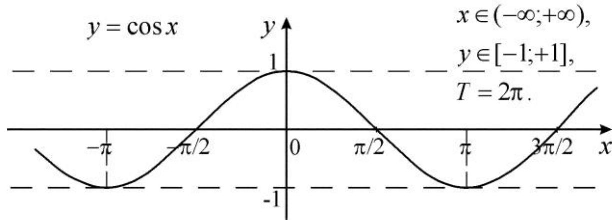

Рис. 14(б)

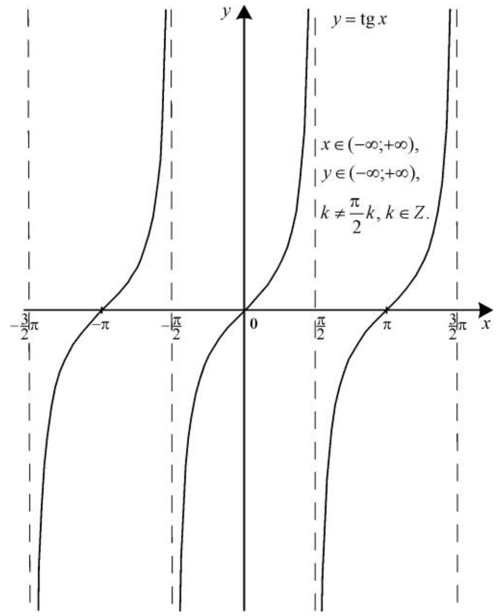

Рис. 14(в)

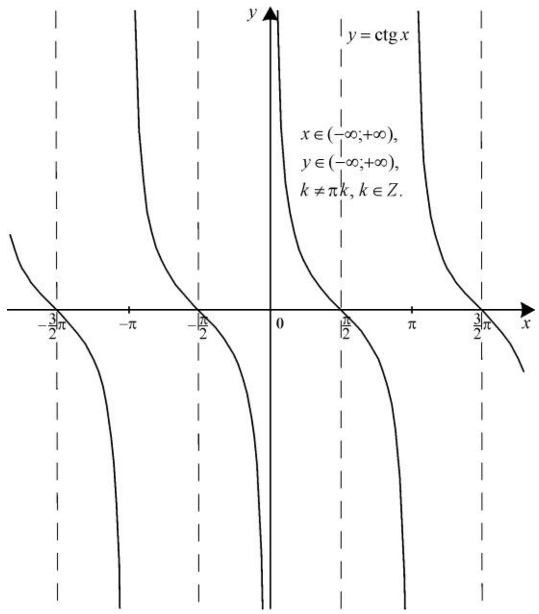

Рис. 14(г)

5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Графіки обернених тригонометричних функцій зображено на рис. 15(а)–(г).

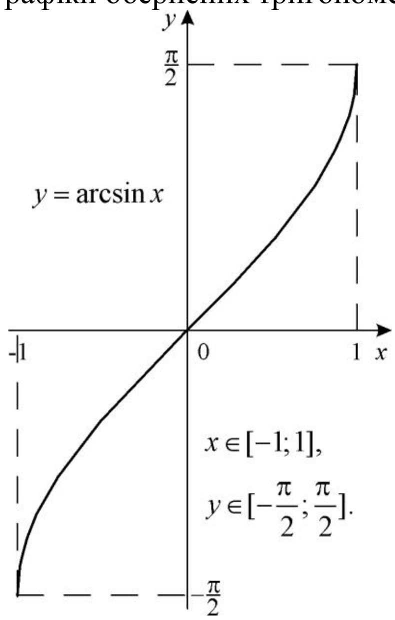

Рис. 15(а)

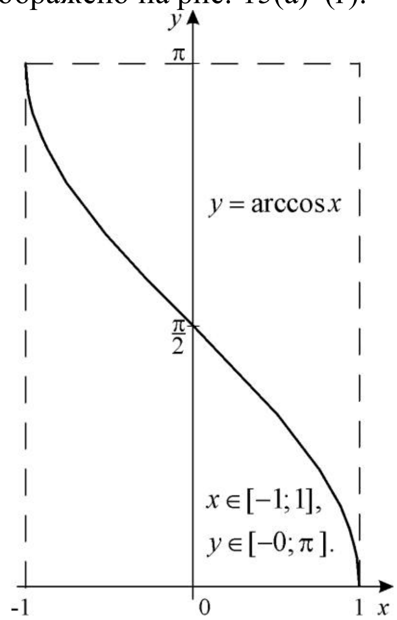

Рис. 15(б)

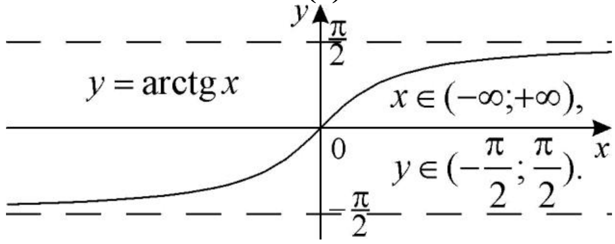

Рис. 15(в)

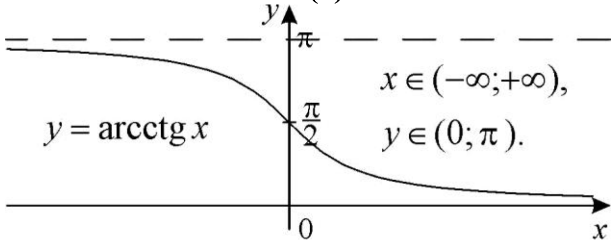

Рис. 15(г)

Нехай функція $u = u(x)$ визначена в області X і має U_1 областю своїх значень, а функція $y = y(u)$ визначена в області U такій, що $U_1 \subset U$. Тоді кожному $x \in X$ можна поставити у відповідність одне значення y за правилом: значенню $x \in X$ ставиться за допомогою функції

$u=u(x)$ одне значення змінної $u\in U_1$, потім одержаному значенню u, яке належить області U, ставиться за допомогою функції $y=y(u)$ одне значення y. Це дає можливість вважати змінну y функцією $y(x)$ аргументу x з областю визначення X. Звичайно пишуть $y=y(u(x))$ і говорять, що $y=y(u(x))$ одержана за допомогою суперпозиції (або накладанням) функцій $y=y(u)$ і $u=u(x)$.

Озн. Функцію $y=y(u)$, $u=u(x)$ називають *складеною функцією,* x називають *кінцевим аргументом*, а u *проміжним аргументом* складеної функції y.

Розглядають також і суперпозиції трьох і більшого числа функцій, які визначаються аналогічно суперпозиції двох функцій. Наприклад, функція $y=y(u)$, $u=u(v)$, $v=v(x)$ є суперпозицією трьох функцій.

Наприклад, функція $y=\cos^2 10^x$ є суперпозицією таких трьох основних елементарних функцій:

$$y=u^2,\ u=\cos v,\ v=10^x.$$

$D(y)=(-\infty;+\infty)$, $D(u)=(-\infty;+\infty)$, $E(u)=[-1;+1]$, $E(v)=(0;+\infty)$, де $D(y)$, $D(u)$ - області визначення функцій y і u, а $E(u)$, $E(v)$ - області значень функцій u і v. При цьому $E(v)\subset D(u)$, $E(u)\subset D(y)$.

Озн. Функція, яка утворюється з основних елементарних функцій і суперпозицій скінченого числа основних елементарних функцій за допомогою скінченого числа арифметичних дій, називається *елементарною*.

1.5. Загальні властивості функцій. Обернена функція.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякій області X.

Озн. Функція $y=f(x)$ називається *обмеженою* в області X, якщо можна вказати таке додатне число M, що для всіх $x\in X$ виконується нерівність $|f(x)|\le M$.

Прикладами функцій, обмежених в області визначення є такі:

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=arctgx,\ y=arcctgx.$$

Озн. Функція $y=f(x)$ називається *необмеженою* в області X, якщо для довільного додатного числа M знайдеться така точка $x\in X$, що $|f(x)|>M$.

Наприклад, функція $y=\dfrac{1}{x}$ є необмеженою на інтервалі $(0;1)$.

Озн. Функція $y=f(x)$ називається *зростаючою* в області X, якщо для будь-якої пари точок x_1,x_2 з області X, таких, що $x_1<x_2$, виконується нерівність $f(x_1)\le f(x_2)$. Якщо з умови $x_1<x_2$ слідує, що $f(x_1)\ge f(x_2)$, то функція $y=f(x)$ називається *спадною* в області X.

Наприклад, функція $y=2^x$ є зростаючою на інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Функція $y=(0,5)^x$ є спадною на інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Функція $y=x^2$ є зростаючою на інтервалі $(0;+\infty)$ і спадною на інтервалі $(-\infty;0)$.

Озн. Функція $y=f(x)$ називається строго зростаючою в області X, якщо для будь-якої пари точок x_1,x_2 з області X, таких, що $x_1<x_2$, виконується нерівність $f(x_1)<f(x_2)$. Якщо з умови $x_1<x_2$ слідує, що $f(x_1)>f(x_2)$, то функція $y=f(x)$ називається строго *спадною* в області X.

Озн. Зростаючі та спадаючі в області X функції називаються *монотонними* в області X.

Озн. Нехай функція $y=f(x)$ визначена в області X, яка є симетричною відносно точки $x=0$. Функцію $y=f(x)$ називають *парною*, якщо $f(-x)=f(x)$ при $x\in X$, і *непарною*, якщо

$f(-x) = -f(x)$ при $x \in X$.

Наприклад, парними функціями на всій області визначення є такі: $y = x^2$, $y = \cos x$; а непарними - такі: $y = x^3$, $y = \sin x$.

Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної функції – відносно початку координат.

Задача. З'ясуйте, чи є дана функція парною або непарною в області її визначення.

1. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Область визначення цієї функції симетрична відносно початку координат, оскільки являє собою всю числову вісь. При цьому:

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x).$$

Отже, функція $y = x^4 - 3x^2 + 1$ є парною.

2. $y = \dfrac{1}{x+3}$.

Область визначення цієї функції не симетрична відносно початку координат, оскільки в точці $x = 3$ функція визначена, а в точці $x = -3$ - ні. Отже, функція $y = \dfrac{1}{x+3}$ не є ні парною ні непарною.

Озн. Функція $y = f(x)$, що визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, називається *періодичною,* якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in X$ і $f(x+T) = f(x)$ для будь-якого $x \in (-\infty; +\infty)$.

Наприклад, функції $y = \cos x$, $y = \sin x$ є періодичними з періодом $T = 2\pi$.

Зауважимо, що для побудови графіка періодичної функції, що має період T, досить побудувати її графік на довільному проміжку довжини T, а потім продовжити цей графік на всю область визначення цієї функції, повторюючи його через кожний проміжок довжини T.

Озн. Нехай функція $y = f(x)$ з областю визначення X і областю значень – Y різним значенням x ставить у відповідність різні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$. Отже, можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ з областю визначення Y і множиною значень X. Ця функція $x = \varphi(y)$ називається *оберненою* функцією до функції $y = f(x)$.

Зауважимо, що функція $y = f(x)$ є оберненою до функції $x = \varphi(y)$. Тобто функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ є взаємно обернені.

Щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, обернену до функції $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x (якщо це можливо). Оскільки кожна точка $(x; y)$ кривої $y = f(x)$ є одночасно точкою кривої $x = \varphi(y)$, то графіки цих функцій збігаються. Якщо в функції $x = \varphi(y)$ незалежну змінну y позначити через x, а залежну змінну x - через y, то матимемо функцію $y = \varphi(x)$. Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ симетричні відносно бісектриси першого і третього координатного кутів.

Задача. Для даної функції знайти обернену функцію на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

1. $y = 2x + 3$.

Оберненою до даної функції є функція $y = \dfrac{x-3}{2}$.

2. $y = a^x$.

Оберненою до даної функції є функція $y = \log_a x$ з областю визначення $(0; +\infty)$.