Лекція №12

Тема 2. Границя функції.

п. 2.1. Послідовність. Границя послідовності

Озн. *Числовою послідовністю* називається функція натурального аргументу, тобто функція з областю визначення $N = \{n\},\ n = 1;2;3;...;n;...$.

Якщо значення функції натурального аргументу (послідовності) зображаються точками на осі Ox, то цю функцію (послідовність) записують у вигляді $x = x(n)$ або $x = x_n$, де n довільне натуральне число: 1, 2, ..., n, ... Значення функції $x(n) = x_n$ називають членами послідовності. Задаючи послідовність, члени послідовності записують у порядку зростання n, тобто: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$. Оскільки послідовність $x = x(n)$ є функцією аргументу n, то вона є змінною величиною.

Наприклад:

1) послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ записують у вигляді $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \ldots, x_n = \frac{1}{n}, \ldots$, або у вигляді $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

2) послідовність $x_n = (-1)^{n+1}$ записують у вигляді: $1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$, оскільки $x_1 = (-1)^{1+1} = 1,\ x_2 = (-1)^{2+1} = -1, \ldots$.

Озн. Число A називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться такий номер N, що всі значення x_n, у яких $n \geq N$ задовольняють умові

$$|x_n - A| < \varepsilon .$$

Зауважимо, що $|x_n - A| < \varepsilon \iff A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$. Інтервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ називають ε - околом точки A.

Тому означення границі послідовності рівносильне наступному означенню: число A називається границею послідовності x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ знайдеться номер N, що всі члени послідовності x_n, у яких $n > N$, знаходяться в ε - околі точки A.

Той факт, що A – границя x_n записують у вигляді

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

Виходячи з означення, $\lim_{n\to\infty} C = C$, де $x_n = C = const$. Зауважимо, що послідовність $x_n = C$ називається стаціонарною послідовністю.

Задача. Доведіть, що $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і знайдемо натуральне число N таке, що при всіх значеннях $n > N$ буде справедлива нерівність

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

Ця нерівність рівносильна нерівності $\frac{1}{n} < \varepsilon$, з якої слідує, що $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді, якщо взяти у якості N будь-яке ціле число, таке, що $N > \frac{1}{\varepsilon}$, то для всіх $n \geq N$ буде виконуватися співвідношення $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$, а отже, і вихідна нерівність. Згідно з означенням $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Озн. Послідовність x_n називається *нескінченно малою величиною*, якщо $\lim\limits_{n \to\infty} x_n = 0$.

Озн. Послідовність x_n називається *нескінченно великою*, якщо для будь-якого числа E $(E > 0)$ знайдеться номер N, що при $n > N$ значення x_n задовольняють нерівність $|x_n| > E$.

Той факт, що x_n – нескінченно велика, записують у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Наприклад:

1) $x_n = n^2$ є нескінченно великою. Дійсно, візьмемо у якості N ціле число, яке більше $\sqrt{\mathrm{E}}$, то для всіх $n \ge N$ буде виконуватися співвідношення $n^2 > \mathrm{E}$. А це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;

2) $x_n = 2^n$ є нескінченно великою (доведіть це самостійно).

Озн. Послідовність x_n називається *обмеженою*, якщо всі її значення знаходяться між двома сталими числами m і M, тобто $m \le x_n \le M$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Наприклад, $x_n = \cos n$ є обмеженою, оскільки $-1 < x_n < 1$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Твердження 1. Послідовність x_n має своєю границею число A тоді і тільки тоді, коли змінна $\alpha_n = x_n - A$ нескінченно мала.

Твердження 2. Якщо x_n – нескінченно велика, то $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ – нескінченно мала.

Зауважимо, що має місце і обернене твердження до твердження 1.2.

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. Послідовність x_n не може мати одночасно двох різних скінчених границь.

Теорема 2. Якщо послідовність x_n має скінчену границю, то вона є обмеженою.

Теорема 3. Якщо послідовності x_n і y_n задовольняють нерівності $x_n \le y_n$ і існують скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то $a \le b$.

Теорема 4. Якщо послідовності x_n, y_n, z_n задовольняють нерівності $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, a – скінченне число, то і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема 5. Сума скінченого числа нескінченно малих є нескінченно малою.

Теорема 6. Добуток нескінченно малої послідовності α_n і обмеженої послідовності x_n є нескінченно малою, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n x_n) = 0$.

Теорема 7. Якщо послідовності x_n і y_n мають скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то послідовності $x_n \pm y_n$ мають скінченні границі і $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

Теорема 8. Якщо послідовності x_n і y_n мають скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то послідовність $x_n \cdot y_n$ має скінчену границю і $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Теорема 9. Якщо послідовності x_n і y_n мають скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ і $b \ne 0$ і для будь-якого n, $y_n \ne 0$, то послідовність $\frac{x_n}{y_n}$ має скінчену границю і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Задача. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + 5n + 3}{3n^2 - 7n}$.

Маємо відношення двох нескінченно великих. Щоб визначитися із значенням границі поділимо і чисельник і знаменник дробу на n^2 (старший степінь знаменника):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+3}{3n^2-7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{7}{n}}=\frac{1}{3}$$ (при знаходженні границі використані теореми 1.6, 1.7 і 1.9).

Теорема 10. Якщо послідовність x_n монотонно зростає і обмежена зверху: $x_n \le M$ (M – скінченне число, $n=1, 2, 3, \dots$), то x_n має скінчену границю, яка не більше M.

Теорема 11. Якщо послідовність x_n монотонно спадає і обмежена знизу: $x_n \ge m$ (m – скінченне число, $n=1, 2, 3, \dots$), то x_n має скінчену границю, яка не менше m.

Розглянемо послідовність $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Можна показати, що для неї справедливе таке твердження.

Твердження 3. Послідовність $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно зростає і $x_n<3$ для $n=1, 2, 3, \dots$.

З теореми 1.10 і твердження 1.3 випливає, що послідовність x_n має скінчену границю. Цю границю позначають e.

Тобто $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Доведено, що e – число ірраціональне і $e \cong 2{,}71$.