Лекція №13

Тема 2. Границя функції.

2.2. Границя функції в точці.

Озн 1. Точка x_0 (x_0– скінчене число) називається *точкою згущення множини* $X=\{x\}$, якщо у будь-якому δ-околі точки x_0 $(x_0-\delta; x_0+\delta), \delta>0$, є значення x, які належать X і не співпадають з точкою x_0.

Нехай далі X – область визначення функції $f(x)$, x_0 – точка згущення X. При вивченні функції інтерес представляє поведінка значень $f(x)$ при наближенні її аргументу до x_0.

Озн 2. Число A називається *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для кожного числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що:

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ при } |x-x_0|<\delta,\ x\in X,\ x\neq x_0.$$

Той факт, що A – границя $f(x)$ в точці x_0 позначають: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Геометричний зміст означення границі функції в точці

Число A є границею функції $f(x)$
в точці x_0, якщо, якою б вузькою ні була
ε-смуга ($\varepsilon>0$) між прямими $y=A-\varepsilon$ *і* $y=A+\varepsilon$,
знайдеться число $\delta>0$,що для всіх
x з δ-околу точки x_0, $x\in X$, $x\neq x_0$,
точки графіка функції $f(x)$ знаходяться всередині
ε-смуги.

<ins>Зауваження 1.</ins> В означенні границі функції в т. x_0 сама ця точка з розгляду виключається. Отже, значення функції в т. x_0 не впливає на границю функції в цій точці. Функція навіть може бути і невизначеною в т. x_0. Тому дві функції, рівні в околі т. x_0, виключаючи може саму т. x_0, мають при $x\to x_0$ одну і ту саму границю або обидві не мають границі.

Приклад. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, де $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$

$g(x)=x^2=f(x)$ при $x\neq 0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$.

<ins>Зауваження 2.</ins> Якщо елементарна функція $f(x)$ визначена в т. x_0, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

<ins>Зауваження 3.</ins> Для функції справедливі теореми про єдиність границі функції в точці; обмеженість в околі т. x_0 функції, яка має скінченну границю в т. x_0.

2.2. Границя функції в нескінченності.

Озн 3. Точка $x_0=+\infty$ ($x_0=-\infty$, $x_0=\infty$) називається *точкою згущення множини* $X=\{x\}$, якщо ця множина містить значення x такі, що $|x|>K$, де $K>0$ – будь-яке додатне число.

Озн 4. Число A називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x\to\infty$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує таке число $N>0$ таке, що для всіх x: $|x|>N$ справедлива нерівність:

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

Якщо в означенні 4 нерівність $|x|>N$ на нерівність $x>N$, то матимемо означення границі функції $f(x)$ при $x\to+\infty$. Якщо в означенні 4 нерівність $|x|>N$ на нерівність $x<-N$, то матимемо означення границі функції $f(x)$ при $x\to-\infty$. Позначення відповідно:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

Геометричний зміст границі функції при $x\to\infty$.

Якою б вузькою не була ε - смуга між прямими $y=A-\varepsilon$ і $y=A+\varepsilon$, знайдеться таке число $N>0$ таке, що правіше прямої $x=N$ і лівіше прямої $x=-N$ графік $y=f(x)$ цілком міститься в ε - смузі.

Приклад. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$.

2.3. Нескінченно малі функції.

Озн 5. Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою в точці* x_0 (при наближенні x до x_0), якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Приклади. 1) $\alpha(x)=x-1$ - нескінченно мала функція при $x\to1$;

2) $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ - нескінченно мала функція при $x\to\infty$;

3) $\alpha(x)=e^{-x}$ - нескінченно мала функція при $x\to+\infty$.

Властивості нескінченно малих функцій.

1. Сума скінченого числа нескінченно малих є нескінченно малою.

2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою.

Приклад. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}=0$, оскільки $(x-1)$ - нескінченно мала при $x\to1$, а $\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}$ - обмежена.

3. Частка від ділення нескінченно малої на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою.

Теорема 1. Для того, щоб $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ необхідно і достатньо, щоб функція ($f(x)-A$) була нескінченно малою в точці x_0.

2.4. Арифметичні операції над границями.

Теорема 2. Якщо функції $f(x)$ *і* $g(x)$ мають в точці x_0 скінченні границі, то в цій точці мають також скінченні границі їх сума, різниця, добуток і частка і:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ $\left(g(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right)$.

Наслідок 1. $\lim\limits_{x\to x_0}(C\cdot f(x))=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, де $C=const$.

Наслідок 2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$.

2.5. Нескінченно великі функції, їх зв'язок з нескінченно малими.

Нехай далі X – область визначення функції $f(x)$, x_0 – точка згущення X.

Озн 7. Якщо для довільного, як завгодно великого, числа $M>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх $x\neq x_0$, що задовольняють умову: $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>M$, то $f(x)$ називають нескінченно великою при $x\to x_0$ і пишуть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Геометричний зміст:

Для довільної горизонтальної смуги між прямими $y=M$ *і* $y=-M$ можна вказати такі прямі $x=x_0-\delta$ *і* $x=x_0+\delta$, що між цими прямими частина графіка функції $y=f(x)$, $x\neq x_0$ цілком міститься зовні цієї горизонтальної смуги.

Якщо в означенні 7 нерівність $|f(x)|>M$ замінити на нерівність $f(x)>M$, то $f(x)$ називають додатною нескінченно великою при $x\to x_0$ і пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Якщо в означенні 7 нерівність $|f(x)|>M$ замінити на нерівність $f(x)<-M$, то $f(x)$ називають від'ємною нескінченно великою при $x\to x_0$ і пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Озн 8. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x\to\infty$, якщо для довільного $M>0$, знайдеться число $N>0$ таке, що для всіх x: $|x|>N \Rightarrow |f(x)|>M$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Приклади. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Теорема 3. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика в точці x_0, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала в т. x_0.

Теорема 4. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала в точці x_0 і $\alpha(x)\neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика в т. x_0.