Лекція №14

2.6. Важливі границі. Невизначені вирази.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ - ***перша важлива границя.***

Вираз $\frac{\sin x}{x}$ є невизначеністю виду $\frac{0}{0}$, коли x прямує до 0. Перша важлива границя розкриває цю невизначеність.

Наслідки з першої важливої границі.

Наслідок 1. $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1}$.

Наслідок 2. $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1}$

Наслідок 3. $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$ - ***друга важлива границя.***

Вираз $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ є невизначеністю 1^{∞}, коли x прямує до 0. Друга важлива границя розкриває цю невизначеність.

Поклавши $x=\frac{1}{y}$ з другої важливої границі матимемо:

$$\boxed{\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e}$$ - **друга важлива границя**

При обчисленні границь, пов'язаних з числом *e*, часто застосовують таке твердження.

Твердження 1. Якщо існують границі $\lim_{x\to x_0} f(x)$ і $\lim_{x\to x_0} g(x)$, причому $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, то існує також границя $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$, яка обчислюється за формулою

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=(\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}}$$

Задача. Знайдіть $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$.

Скористаємось другою важливою границею і твердженням 1. Матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{k}{x})^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}.$$

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, де кожна з величин A, B може бути як скінченним числом, так і нескінченністю.

Озн.1. Якщо значення величин A і B не дає можливості знайти або $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, або $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$, або $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ і ця границя (або її відсутність) залежить від вигляду функцій $f(x)$ і $g(x)$, то відповідний вираз $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)^{g(x)}$ називається *невизначеним виразом в точці* x_0.

Поставимо у відповідність виразу $f(x)+g(x)$ символ $A+B$, виразу $f(x)\cdot g(x)$ - символ AB, виразу $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ - символ $\dfrac{A}{B}$, виразу $f(x)^{g(x)}$ - символ A^B. Вираз буде невизначеним, якщо відповідний символ має вигляд:

$$\boxed{\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0}$$ - невизначеності

Наприклад, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax-a}{x^2-1} = a \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{a}{2}$.

В цьому прикладі $f(x) = ax - a = a(x-1)$, $g(x) = x^2 - 1$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$, $A = 0,\ B = 0$. Відповідний символ для будь-якого a має вигляд $\dfrac{0}{0}$. Отже, $\dfrac{ax-a}{x^2-1}$ - невизначений вираз в точці $x = 1$. Бачимо, що при різних значеннях a, границі цього невизначеного виразу різні (наприклад, при $a = 1$, границя дорівнює $\dfrac{1}{2}$, при $a = 100$, границя дорівнює 50).

Озн. 2. Операція знаходження границі (або встановлення факту її відсутності) з урахуванням вигляду функцій $f(x)$ і $g(x)$, називається *розкриттям невизначеності.*

2.7. Порівняння нескінченно малих Еквівалентні нескінченно малі.

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - нескінченно малі в точці x_0.

Озн. 3. Якщо відношення $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ має скінченну і відмінну від нуля границю в точці x_0, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *нескінченно малими величинами одного порядку.*

Озн. 4. Якщо відношення $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ є нескінченно малим в точці x_0, то нескінченно мала $\beta(x)$ називається *нескінченно малою величиною вищого порядку ніж* $\alpha(x)$, а нескінченно мала $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою величиною нижчого порядку ніж* $\beta(x)$.

Озн. 5. Якщо відношення $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не має границі в точці x_0, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ вважають *непорівняними* між собою.

Озн. 6. Нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними нескінченно малими в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - еквівалентні нескінченно малі, то пишуть $\alpha(x)\cong\beta(x)$.

Твердження 2. Якщо $\alpha(x)\cong\beta(x)$ в точці x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\alpha(x))=\lim_{x\to x_0}(f(x)\beta(x)),\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

При використанні цього твердження у процесі розв'язування задач користуються наступними співвідношеннями.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих в точці $x_0=0$:

1) $\sin x\cong x$,
2) $tgx\cong x$,
3) $\arcsin x\cong x$,
4) $arctgx\cong x$,
6) $a^x-1\cong x\ln a$,
7) $e^x-1\cong x$,
8) $\log_a(1+x)\cong x\log_a x$,
9) $\ln(1+x)\cong x$,

Задача 1. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg5x}$.

Оскільки $\sin 3x\cong 3x$, $tg5x\cong 5x$ при $x\to 0$, то за твердженням 2 дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

Задача 2. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\arcsin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

Оскільки $\arcsin(x-3)\cong x-3$ при $x\to 3$, то за твердженням 2 дістанемо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\arcsin(x-3)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}=1.$$

Задача 3. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 4x}{x^2}$.

Оскільки $\ln\cos 4x=\ln(1+\cos 4x-1)\cong\cos 4x-1$ при $x\to 0$, то за твердженням 2 дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 2x}{x^2}=-8.$$

Тема 3. Неперервність функції.

п. 3.1. Однобічні границі функції

У наведених вище означеннях границі вважалось, що x прямує до x_0 довільним способом: залишаючись меншим від x_0 (зліва від x_0), більшим від x_0 (справа від x_0) чи коливаючись навколо x_0. Проте трапляється, що спосіб наближення x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції.

Нехай x наближається до x_0 зліва, тоді:

$\lim\limits_{x\to x_0(x<x_0)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$ - лівостороння границя

Нехай x наближається до x_0 справа, тоді:

$$\lim_{x\to x_0 (x>x_0)} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$$ - правостороння границя

Твердження. Границя функції в точці дорівнює A тоді і тільки тоді, коли обидві однобічні границі функції в цій точці рівні A.

Тобто: $$\boxed{\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A}$$

Приклад. Дослідити функцію $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ поблизу точки $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 1,\qquad \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 0.$

п. 3.2. Неперервність функції в точці. Точки розриву.

Нехай проміжок X є областю визначення функції $f(x)$, $x_0 \in X$, $f(x_0)$ - значення $f(x)$ в точці x_0.

Озн. 1. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}. \qquad (1)$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то рівність (3.1) можна записати у вигляді

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)}, \qquad (2)$$

тобто для функції $f(x)$, неперервної в точці x_0 символи $\lim$ і f перестановочні.

Озн. 2. Якщо рівність (1) не виконується, то функцію $f(x)$ називають *розривною в точці* x_0.

Нехай $x \in X$, $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta y$. Тоді при $x \to x_0$ маємо $\Delta x \to 0$ і рівність (1) запишеться у вигляді:

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0}.$$

Остання рівність еквівалентна рівності (1) і може бути прийнята за означення неперервної функції. Її зміст полягає в тому, що $f(x)$ - неперервна в точці x_0, якщо приріст функції Δy є нескінченно малою, коли приріст аргументу Δx - нескінченно мала.

Озн. 3. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 *зліва* (справа), якщо має місце рівність

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Озн.4. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 *справа*, якщо має місце рівність

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо x_0 - внутрішня точка X, то неперервність $f(x)$ в точці x_0 рівносильна одночасній неперервності $f(x)$ зліва і справа.

Нехай $f(x)$ визначена в проміжку $[x_0, x_0+h]$, $h>0$.

Озн.5. Функція $f(x)$ *має розрив в точці* x_0 *справа*, якщо:

1) $f(x_0+0)$ - скінченне число, але $f(x_0+0) \neq f(x_0)$;

2) $f(x_0+0) = \infty$,

3) $f(x_0+0)$ не існує.

В першому випадку розрив називають *розривом першого роду*, а в другому і третьому – *розривом другого роду*.

Якщо $f(x)$ визначена в проміжку $[x_0 - h,\ x_0]$, $h > 0$, то класифікація розривів зліва в точці x_0 аналогічна класифікації в попередньому випадку.

Озн.6. Якщо $f(x)$ визначена на проміжку $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, $h > 0$, $f(x_0 + 0)$ і $f(x_0 - 0)$ - скінченні числа, але принаймні одне з них не дорівнює $f(x_0)$, то розрив функції $f(x)$ в точці x_0 називають *розривом першого роду*. У випадку, коли принаймні одна з величин $f(x_0 + 0)$ або $f(x_0 - 0)$ дорівнює ∞, або не існує, розрив в точці x_0 називають *розривом другого роду*.

Озн.7. Якщо $f(x)$ визначена на проміжку $(x_0,\ x_0 + h)$ або на проміжку $[x_0 - h,\ x_0)$, або на проміжку $[x_0 - h,\ x_0) \cup (x_0, x_0 + h\,]$, $h > 0$ і відповідні однобічні границі функції $f(x)$ в точці x_0 - скінченні числа, то розрив функції $f(x)$ в точці x_0 називають *розривом першого роду* . В інших можливих випадках розрив функції $f(x)$ в точці x_0 називають *розривом другого роду* .

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то неперервні в точці x_0 також функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ і $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$.

Наприклад:

1) ціла раціональна функція $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n$ неперервна для будь-якого значення x;

2) дробово раціональна функція $R(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$ неперервна при всіх значеннях x, які не перетворюють знаменник у нуль.

Теорема 2. (Теорема Вейерштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,\ b]$, то $f(x)$ обмежена на цьому проміжку і досягає на ньому найменшого m і найбільшого M значень.

Теорема 3. (Теорема Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,\ b]$ і набуває на його кінцях різних значень: $f(a) = A,\ f(b) = B, A \neq B$, то для довільного числа $\mu \in (A,\ B)$ знайдеться таке число $c \in (a, b)$, що $f(c) = \mu$.

Теорема 3.4. Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.