Лекція №2

п. 1.3. Обернена матриця. Розв'язування матричних рівнянь.

Нехай A - квадратна матриця порядку n.

Озн. Квадратна матриця A^{-1} порядку n називається *оберненою до матриці A*, якщо:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E,$$

де E - одинична матриця порядку n.

Теорема. Нехай A - квадратна матриця порядку n.

Якщо $|A| = 0$, то матриця A не має оберненої матриці.

Якщо $|A| \neq 0$, то матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}, при цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(4)}$$

де A_{ij} (i=1, 2, ..., n; j=1, 2, ..., n) - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

Озн. *Найпростішими матричними рівняннями* називаються рівняння виду

$$AX = B \text{ або } XA = B,$$

де A, B - відомі матриці, а X - невідома матриця.

Розв'язування найпростіших матричних рівнянь.

1. Нехай $AX = B$ і $|A| \neq 0$, тоді:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, тоді, згідно з означенням оберненої матриці:

$E\cdot X = A^{-1}\cdot B$ і $X = A^{-1}\cdot B$.

2. Нехай $XA = B$ і $|A| \neq 0$, тоді:

$X\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1}$, тоді, згідно з означенням оберненої матриці:

$X\cdot E = B\cdot A^{-1}$ і $X = B\cdot A^{-1}$.

п. 1.4. Ранг матриці. Трапецієподібна матриця.

Озн. *Мінором* r-го порядку матриці A розміру $m\times n$ називається визначник r-го порядку, утворений з елементів матриці A, що залишилися в ній після викреслення $m-r$ рядків і $n-r$ стовпців ($r \le m,\ r \le n$).

Озн. Натуральне число r називається рангом ненульової матриці A, якщо воно задовольняє такі вимоги:

1) A має мінор r-го порядку, відмінний від нуля;

2) будь-який мінор ($r+1$)-го і більш високого порядку (якщо такі існують) дорівнюють нулю.

Отже, рангом матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних нулю.

<u>Позначення</u>: $r,\ r(A),\ rang(A)$.

Зауваження. Ранг нульової матриці вважають рівним нулю.

Озн. *Базисним мінором матриці* A називається будь-який її мінор r-го порядку, відмінний від нуля.

Озн. *Елементарними перетвореннями матриці* A називаються такі операції:

1) перестановка двох рядків або стовпців матриці A;
2) додавання до всіх елементів рядка (стовпця) матриці A відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число.

Озн. Матриці, здобуті одна з одної за допомогою елементарних перетворень, називаються *еквівалентними*.

Позначення еквівалентних матриць A і B: $A \approx B$.

Теорема 1. Ранги еквівалентних матриць рівні.

Тобто, якщо $A \approx B$, то $r(A) = r(B)$.

Озн. Матриця розмірів $m \times n$, рангу $r \geq 1$ називається трапецієподібною, якщо існує таке натуральне число l ($l \leq m$, $l \leq n$), що

1) елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ll}$ не рівні нулю;

2) при $l < m$ елементи стовпців, що стоять під елементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ll}, a_{ll+1}, \ldots, a_{ln}$ рівні нулю;

3) при l=m рівні нулю елементи стовпців, що стоять під елементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{l-1l-1}$.

Тобто матриця $A_{тр}$ має вигляд:

$$A_{тр}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2l} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ll} & \ldots & a_{ln} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Як правило, ранг матриці шукають не на підставі означення, а за допомогою наступних тверджень.

Теорема 2. Ранг трапецієподібної матриці дорівнює l (дорівнює кількості її ненульових рядків).

Теорема 3. Для будь-якої ненульової матриці A існує еквівалентна їй трапецієподібна матриця $A_{тр}$, яка може бути одержана з допомогою елементарних перетворень матриці A.

Отже, для знаходження рангу ненульової матриці A знаходять еквівалентну їй трапецієподібну матрицю $A_{тр}$ (її існування забезпечує теорема 3). Ранг $A_{тр}$ визначають за теоремою 2. Тоді ранг матриці A дорівнює рангу матриці $A_{тр}$ (на підставі теореми 1).