Лекції №3, 4

Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

п. 2.1. Основні поняття.

Озн. Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

де: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - невідомі системи; a_{ij} - дійсні числа, які називають коефіцієнтами при невідомих системи (*), $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$; b_i - дійсні числа, які називають вільними членами системи (*), $i = 1,\ldots,m$.

Озн. *Розв'язком системи* (*) називається впорядкований набір чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, підстановка яких замість невідомих перетворює всі рівняння системи (*) в тотожності.

Озн. Система (*) називається *сумісною*, якщо вона має хоч би один розв'язок. Якщо ж система (*) не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

Озн. Сумісна система (*), яка має лише один розв'язок, називається *визначеною*. Сумісна система (*), яка має безліч розв'язків, називається *невизначеною*. В останньому випадку кожен її розв'язок називається *частинним розв'язком* системи (*). Сукупність всіх частинних розв'язків називається *загальним розв'язком* системи (*).

Озн. *Розв'язати систему* (*) – це означає з'ясувати, сумісна вона чи несумісна, і, у разі сумісності, знайти її загальний розв'язок.

Озн. Дві системи рівнянь (*) називаються *рівносильними*, якщо їх множини розв'язків співпадають.

Озн. *Елементарними перетвореннями системи* (*) називають такі операції:

1) перестановка будь-яких рівнянь системи (*);
2) додавання до одного рівняння системи (*) іншого рівняння, попередньо помноженого на деяке число.

Теорема. Внаслідок елементарних перетворень система (*) переходить у рівносильну їй систему.

п. 2.2. Теорема Кронекера - Капеллі.

Розглянемо систему (*):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Озн. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots. \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається *основною матрицею системи* (*).

Озн. Матриця

$$A|B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називається *розширеною матрицею* системи (*).

Теорема 1. (Теорема Кронекера – Капеллі). Система (*) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$r(A)=r(A|B)=r\,.$$

При цьому число r називається рангом системи (*).

Теорема 2. Якщо $r=n$, то система (*) має єдиний розв'язок.

Теорема 3. Якщо $r<n$, то система (*) має безліч розв'язків.

п. 2.3. Розв'язок невироджених СЛАР. Формули Крамера.

Розглянемо систему (*), в який кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, тобто систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (*)$$

Введемо в розгляд такі матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\,...a_{1n} \\ a_{12}\;a_{22}\,...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}\,a_{m2}\,...a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основна матриця системи (*),

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_3 \end{pmatrix}$$ - матриця невідомих системи (*), $$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$ - матриця вільних членів системи (*).

Тоді систему (*) можна записати у вигляді матричного рівняння: $AX=B$.

Будемо вважати, що $\Delta=|A|\neq 0$, тобто система (*) – невироджена. Тоді, як було показано в п.1.3, розв'язок такого матричного рівняння матиме вигляд:

$$\boxed{X=A^{-1}\cdot B} \qquad (1)$$

Відшукання розв'язків системи (*) за формулою (1) називають матричним методом розв'язування невиродженої системи (*).

Матричну рівність (1) запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}\,A_{21} \ldots\; A_{n1} \\ A_{12}\,A_{22} \ldots\; A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}\,A_{2n} \ldots\; A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$ Звідси слідує, що: $$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$ $$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta},$$ $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ $$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Але $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ є розкладом визначника $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1\; a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2\; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$ за елементами першого стовпчика.

При цьому визначник Δ_1 отримується з визначника Δ (визначника основної матриці системи (*)) шляхом заміни першого стовпчика коефіцієнтів стовпчиком вільних членів системи(*). Отже, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогічно: $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ... , $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Озн. Формули:

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,\ldots,n} \qquad (2)$$

називають ***формулами Крамера***. Тут визначники Δ_i одержуються з визначника Δ основної матриці системи (*), шляхом заміни *i*-го стовпчика коефіцієнтів стовпчиком вільних членів.

Таким чином, невироджена система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими має єдиний розв'язок, який може бути знайдений матричним методом або методом Крамера.

п. 2.4. Розв'язування СЛАР методом Гаусса.

Розглянемо систему (*):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad .\qquad .\qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Метод Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих за допомогою елементарних перетворень системи. Метод Гаусса є універсальним методом розв'язування СЛАР.

Розглянемо перше рівняння системи. Якщо в ньому усі коефіцієнти при невідомих і вільний член дорівнюють нулю, то ми переставляємо це рівняння на останнє місце. Якщо усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система розв'язків немає. Тому інтерес представляє випадок, коли в першому рівнянні хоч би один із коефіцієнтів при невідомих не дорівнює нулю. Нехай ним буде коефіцієнт при x_1.

Перепишемо тепер початкову систему в такому вигляді. Перше рівняння залишимо без зміни. Наступні рівняння одержимо додаванням до них першого рівняння, помноженого на деяке число так, щоб після додавання рівняння не містили x_1. Таким чином, нова система, рівносильна початковій, містить невідоме x_1 тільки в першому рівнянні, з решти рівнянь невідоме x_1 виключене.

Розглянемо тепер друге рівняння нової системи. Якщо в ньому усі коефіцієнти при невідомих і вільний член дорівнюють нулю, то переставляємо це рівняння на останнє місце. Якщо усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система розв'язків немає. Тому інтерес представляє випадок, коли в другому рівнянні нової системи є хоч би один коефіцієнт при невідомих, відмінний від нуля. Можемо вважати, що це коефіцієнт при x_2. Перепишемо тепер нову систему в такому вигляді. Перші два рівняння залишимо попередніми. В інших рівняннях виключимо x_2, додаючи до них друге рівняння, помножене на відповідний коефіцієнт.

Продовжуючи аналогічні дії у випадку, коли система сумісна, одержимо систему, в якій матриця коефіцієнтів при невідомих буде трапецієподібною, тобто система буде мати вигляд

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \quad \ldots \quad + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \quad \ldots \quad + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \qquad . \quad . \quad . \\ \qquad \qquad c_{ll}x_l + c_{ll+1}x_{l+1} + \ldots + c_{ln}x_n = d_l. \end{cases}$$

Тоді, якщо $l=n$, то $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$. Підставимо x_n в передостаннє рівняння системи, знайдемо x_{n-1}. Потім аналогічно знайдемо невідомі $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$. В цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Якщо $l<n$, то з останнього рівняння виражаємо x_l через невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$. Підставляючи цей вираз в передостаннє рівняння, виражаємо x_{l-1} через невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$. Потім, аналогічно, виражаємо невідомі $x_{l-2}, x_{l-3}, \ldots, x_2, x_1$. В цьому випадку система має безліч розв'язків, причому базисними невідомими є невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_l$, вільними - невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$.

Метод Гаусса рівносильний відшуканню матриці, еквівалентної розширеній матриці системи, в якій та частина, що відповідає основній матриці системи, є трапецієподібною. Причому при елементарних перетвореннях розширеної матриці не допускається перестановка останнього стовпця, що відповідає стовпцю з вільних членів. Якщо після деякого елементарного перетворення розширеної матриці в ній появиться рядок, що складається з нулів, за винятком останнього елемента, то система рівнянь несумісна.

п. 2.5. Системи лінійних однорідних рівнянь.

Озн. Система рівнянь (3.1), в якій $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, називається *однорідною.* Така система має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Однорідна система завжди сумісна, так як $r(A) = r(A|B) = r$. Набір чисел $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ є її розв'язком. Розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ називається нульовим.

Якщо $n=r$, то нульовий розв'язок буде єдиним розв'язком системи (**); при $r<n$ система (**) має розв'язки, відмінні від нульового.

Теорема 1. Сума розв'язків однорідної системи також є розв'язком цієї системи.

Теорема 2. Добуток будь-якого розв'язку однорідної системи на довільне число також є розв'язком цієї системи.