Лекції № 5

Тема 3. Вектори звичайного простору.

п. 3.1. Основні поняття.

Озн. Розглянемо дві точки A і B. Якщо вважати т. A початковою, а т. B кінцевою, то отримаємо напрямлений відрізок AB, який називається *вектором* і позначається $\overline{AB}$ або $\overline{a}$.

Озн. Довжина відрізка AB називається *модулем вектора* $\overline{AB}$.

Озн. Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називається *нульовим* і позначається $\overline{O}$.

Зауваження. Довжина нульового вектора дорівнює нулю, за напрям нульового вектора можна взяти довільний наперед заданий напрямок.

Озн. Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці.

Озн. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

Озн. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини і однакові напрями.

Озн. Два вектори називаються *протилежними*, якщо вони колінеарні, протилежно напрямлені і мають рівні модулі. Вектор, протилежний до $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$

Озн. Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині, або на паралельних площинах.

Озн. *Ортом* даного ненульового вектора називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора.

Зауваження. З означення рівності двох векторів випливає, що поняття вектора рівносильне поняттю паралельного перенесення.

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на дійсне число.

Додавання векторів. Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який іде з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, при умові, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис.2.1.).

Поряд із «правилом трикутника», яке сформульоване вище, часто користуються рівносильним йому «правилом паралелограма». Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ приведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить із спільного початку $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.2.2.).

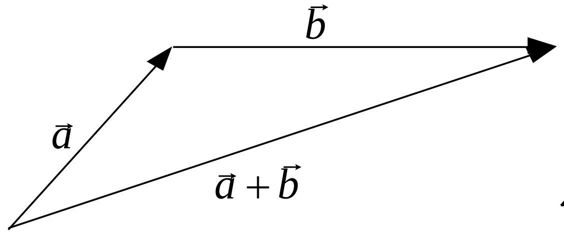

Рис.2.1

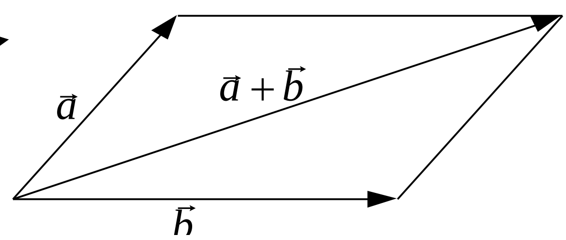

Рис.2.2.

Зауваження 2.3. Сума кількох векторів може бути знайдена за «правилом многокутника». Сумою кількох векторів є вектор, початок якого збігається з початком першого доданка, а кінець з кінцем останнього, при умові, що початок кожного наступного доданка збігається з кінцем попереднього (рис.2.3).

Означення 2.2. Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, із яких перший називається зменшуваним, а другий від'ємником, називається сума зменшуваного вектора і вектора, протилежного від'ємнику, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис.2.4).

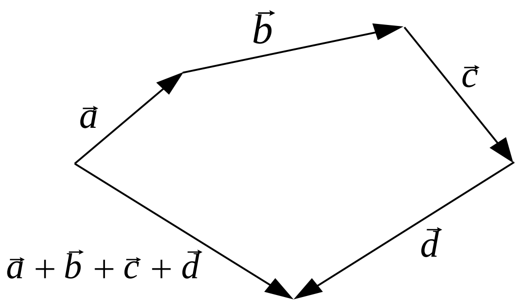

Рис.2.3.

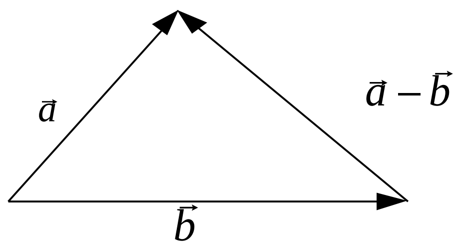

Рис.2.4.

Властивості операції додавання векторів:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*комутативна властивість*).
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*асоціативна властивість*).
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.
4. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$ такий, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Множення вектора на число. Добутком $\alpha\vec{a}=\vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, який має:

1) модуль, рівний добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α, тобто $|\vec{a}\alpha|=|\alpha\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|$,

2) напрям, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний напряму вектора $\vec{a}$, якщо α <0.

Властивості операції множення вектора на число:

1. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми векторів*).
2. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (*дистрибутивна властивість векторного множника відносно суми чисел*).
3. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (*асоціативна властивість*).

Означення 2.3. Лінійною комбінацією *n* векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, тобто вираз, що має вигляд

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n.$$

Теорема 1. Ненульові вектори $\overline{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує дійсне число α таке, що: $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

Теорема 2. Ненульові вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли існують такі дійсні числа α *і* β такі, що: $\overline{c}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$.

п. 3.2. Ортонормований базис. Координати вектора.
Лінійні операції над векторами в координатах.

Візьмемо у просторі декартову прямокутну систему координат. Позначимо через $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ одиничні вектори (орти) додатних напрямів осей Ox, Oy, Oz.

Будемо говорити, що вектори $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ утворюють *ортонормований базис* у просторі.

Розглянемо вектор $\overline{a}$ з початком в т. *O*.

$\bar{a} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}$,

$\overline{OP} = x\bar{i}$, $\overline{OQ} = y\bar{j}$, $\overline{OR} = z\bar{k}$,

де x, y, z - дійсні числа. Тоді

$\boxed{\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}$ (*)

Озн. Рівність (*) називається *розкладом* вектора $\bar{a}$ по векторах ортонормованого базису, а коефіцієнти цього розкладу – дійсні числа x, y, z - називаються *координатами* вектора $\bar{a}$ в ортонормованому базисі.

Позначення: $\bar{a} = (x, y, z)$.

Теорема. Для кожного вектора $\bar{a}$ розклад (*) за базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ єдиний, тобто коефіцієнти x, y, z цього розкладу визначаються однозначно.

Зауваження. Координати вектора $\bar{a}$ в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ співпадають з координатами т. A – кінця цього вектора.

Позначимо буквами α, β, γ кути нахилу вектора $\bar{a}$ відповідно до осей *Ox, Oy, Oz*. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\bar{a}$.

Справедливі співвідношення.

Довжина вектора $\bar{a}$ виражається через його координати формулою

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (1)$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ виражаються через координати цього вектора за формулами:

$$cos\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad cos\,\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad cos\,\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2)$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці, тобто

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1.$$

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2). \end{aligned} \qquad (3)$$

Якщо $\vec{a} = (x, y, z)$, то для будь-якого числа α

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \qquad (4)$$

Теорема. Якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ - колінеарні ненульові вектори і $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}} \qquad (5)$$

Тобто, ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні.

Задача. Нехай т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, т. $M_2(x_2, y_2, z_3)$. Знайдемо координати вектора $\overline{M_1M_2}$.

$\overline{M_1M_2} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$,

$\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$\bar{r}_2 = (x_2, y_{2,}, z_2)$.

Тоді $\boxed{\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)}$ - координати вектора, заданого координатами початку і кінця.