Лекції № 6

п. 3.3. Проекція вектора на вісь.

Озн. *Віссю* $\vec{S}$ називається пряма, на якій вибрано додатний напрям і одиницю довжини. Вісь $\vec{S}$ визначається вектором $\vec{S}_0$ (ортом осі).

Озн. *Проекцією точки M на дану вісь* $\vec{S}$ називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки *M* на дану вісь.

Озн. *Складовою вектора* $\vec{AB}$ *на вісь* $\vec{S}$ називається вектор $\vec{A'B'}$, де точка A' - проекція точки A, а точка B' - проекція точки B на вісь $\vec{S}$.

Озн. *Проекцією вектора* $\vec{AB}$ *на вісь* $\vec{S}$ називається довжина складової цього вектора, взята з додатним знаком, якщо напрямки складової та осі збігаються, і з від'ємним знаком, якщо складова та вісь мають протилежні напрямки. Проекцію вектора $\vec{AB}$ на вісь $\vec{S}$ позначають $np_{\vec{S}}\vec{AB}$.

Теорема 1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь $\vec{S}$ дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута α між вектором та віссю, тобто

$$np_{\vec{S}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha \qquad (1)$$

Властивості проекції вектора на вісь:

1. Проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$np_{\vec{S}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = np_{\vec{S}}\vec{a}_1 + np_{\vec{S}}\vec{a}_2 + \ldots + np_{\vec{S}}\vec{a}_n .$$

2. Проекція добутку скаляра на вектор дорівнює добутку цього скаляра на проекцію вектора, тобто

$$np_{\vec{S}}\lambda\vec{a} = \lambda\ np_{\vec{S}}\vec{a} .$$

п. 3.4. Скалярний добуток векторів.

Озн. *Скалярним добутком* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, позначене символом $(\bar{a},\bar{b})$ (або $\vec{a}\ \vec{b}$), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто

$$\boxed{(\bar{a},\bar{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})}. \qquad (2)$$

<u>*Наслідок*</u>. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з цих векторів на проекцію другого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів, тобто

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\vec{a}|\ np_{\vec{a}}\vec{b} \ \text{ або } \ (\bar{a},\bar{b}) = |\vec{b}|\ np_{\vec{b}}\vec{a} .$$

Теорема 1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку.

Теорема 2. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток додатний (від'ємний).

Властивості скалярного добутку.

1. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{b})$. *(комутативна властивість).*
2. $(\overline{\alpha a},\bar{b}) = (\bar{a},\overline{\alpha b}) = \alpha(\bar{a},\bar{b})$, де α - дійсне число. *(асоціативна властивість).*
3. $(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})$ *(дистрибутивна властивість)*
4. $(\bar{a},\bar{a}) = |\vec{a}|^2$. Добуток $(\bar{a},\bar{a})$ позначається через $\vec{a}^2$ і називається скалярним квадратом. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора.

Зауваження 4.2. Справедливі рівності

$$\vec{i}^2 = 1;\quad \vec{j}^2 = 1;\quad \vec{k}^2 = 1;\quad \langle\vec{i},\vec{j}\rangle = \langle\vec{i},\vec{k}\rangle = \langle\vec{j},\vec{k}\rangle = 0 .$$

Теорема 3. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\boxed{(\bar{a},\bar{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}. \qquad (3)$$

Отже, необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ є рівність

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

За формулами (2) і (3) кут між векторами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ визначається за формулою

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}}. \qquad (4)$$

Тоді проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою:

$$пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},$$

а скалярний квадрат вектора за формулою:

$$|\vec{a}|^2=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle=x_1^2+y_1^2+z_1^2.$$

п.3.5. Векторний добуток векторів.

Озн. *Векторним добутком векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається символом $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ (або $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$) і задовольняє трьом вимогам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними, тобто

$$\boxed{|\vec{c}|=\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi}; \qquad (5)$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$, якщо $\vec{c}\neq\vec{0}$, напрямлений так, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою (найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, відбувається проти годинникової стрілки).

Теорема 1. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

Теорема 2. Довжина (модуль) векторного добутку $[\vec{a},\vec{b}]$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=S$.

Властивості векторного добутку.

1. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ *(антикомутативна властивість).*
2. $[\alpha\bar{a},\vec{b}]=[\bar{a},\alpha\bar{b}]=\alpha[\vec{a},\vec{b}]$, де α - дійсне число. *(асоціативна властивість).*
3. $[\bar{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ *(дистрибутивна властивість).*
4. $[\vec{a},\vec{a}]=0$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

Теорема 3. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),$$

то векторний добуток цих векторів має вигляд

$$\boxed{\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.} \qquad (6)$$

Нехай в т. А прикладено силу $\overline{F}$ і т. О – деяка фіксована точка.

Озн. *Моментом сили* $\overline{F}$ відносно т. О називається вектор $\overline{M}$, довжина якого дорівнює добутку сили на плече цієї сили і який напрямлений по осі обертання так, що коли дивитися з його кінця, то обертання тіла відбувається проти руху годинникової стрілки.

Тоді $\overline{M}=\left[\overline{OA},\overline{F}\right]$. Ця формула виражає механічний зміст векторного добутку векторів.

п. 3.6. Мішаний добуток векторів

Нехай дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Озн. Якщо вектор $\vec{a}$ векторно помножити на вектор $\vec{b}$, а потім одержаний вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ скалярно помножити на вектор $\vec{c}$, то в результаті одержується число $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$, яке називається *мішаним добутком векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Теорема 1. Мішаний добуток $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взятому із знаком плюс, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - права, і зі знаком мінус, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - ліва. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то $([\vec{a}\ \vec{b}],\vec{c})$ дорівнює нулю.

<u>*Наслідок 1*</u>. Справедлива рівність

$$([\vec{a}\ \vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b}\ \vec{c}]).$$

Тому мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ звичайно позначають $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, не вказуючи, які два з цих векторів перемножуються векторно.

<u>*Наслідок 2.*</u> Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

<u>*Наслідок 3.*</u> Мішаний добуток трьох векторів, два з яких колінеарні, дорівнює нулю.

Теорема 2. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами:

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1);\quad \vec{b}=(x_2;y_2;z_2);\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3),$$

то мішаний добуток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ дорівнює визначнику, елементи рядків якого відповідно дорівнюють координатам векторів, що перемножаються, тобто

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

<u>*Наслідок.*</u> Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$; $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$; $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ є рівність нулю визначника, рядками якого є координати цих векторів, тобто рівність

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$$