Лекції № 7

п. 3.7. Лінійна залежність і незалежність векторів.

Озн. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, з яких хоч би одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (1)$$

Озн. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність (1) справедлива лише в тому випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Теорема 1. Якщо хоч би один із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ нульовий, то ці вектори є лінійно залежними.

Теорема 2. Якщо серед *n* векторів які-небудь *n*-1 вектори - лінійно залежні, то і всі *n* векторів лінійно залежні.

Теорема 3. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.

Теорема 4. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед двох неколінеарних векторів не може бути нульового вектора.

Теорема 5. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не компланарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед трьох некомпланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів і не може бути ні одного нульового вектора.

Теорема 6. Будь-які чотири вектори в звичайному просторі лінійно залежні.

п.3.8. Базис. Координати вектора в базисі.

Нехай маємо деяку множину L векторів, яку будемо називати простором векторів або векторним простором.

Озн. *Базисом векторного простору* L називається впорядкована система векторів цього простору, така що:

1) ця система є лінійно незалежною;
2) будь-який вектор простору L може бути представлений у вигляді лінійно комбінації векторів цієї системи.

Озн. *Розмірністю векторного простору* L називається число *n*, яке дорівнює кількості векторів в базисі цього простору.

Зауваження. Отже, розмірність векторного простору – це максимально можлива кількість лінійно незалежних векторів цього простору.

Позначення: L_n.

Розглянемо окремі випадки.

1. Нехай L - множина векторів на прямій. Тоді базис цього простору утворює будь-який ненульовий вектор на цій прямій. Позначення: L_1.

2. Нехай L - множина векторів на площині. Тоді базис цього простору утворюють будь-які два не колінеарні вектори цієї площини. Позначення: L_2.

3. Нехай L - множина векторів звичайного простору. Тоді базис цього простору утворюють будь-які три некомпланарні вектори звичайного простору. Позначення: L_3.

Зазвичай базисні вектори простору позначають: $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$.

Розглянемо векторний простір L_3. Нехай вектори $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ утворюють базис цього простору. За означенням базису, будь-який вектор $\overline{a} \in L_3$ можна представити у вигляді:

$$\boxed{\overline{a} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}} \qquad (*)$$

Рівність (*) називається розкладом вектора $\overline{a}$ за базисом.

Зауважимо, що аналогічні рівності справедливі у випадках L_1 і L_2.

Озн. Коефіцієнти розкладу (*), тобто числа x, y, z називаються *координатами вектора* $\overline{a}$ в даному базисі.

Позначення: $\overline{a} = (x, y, z)$.

Теорема 1. Координати вектора $\overline{a}$ в даному базисі визначаються однозначно.

Доведення.

Нехай $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ - базис L_3. Тоді $\overline{a} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}$ (1). Припустимо, що

$\overline{a} = x'\overline{e_1} + y'\overline{e_2} + z'\overline{e_3}$ (2). Віднімемо від рівності (1) рівність (2). За властивостями лінійних операцій над векторами:

$$(x - x')\overline{e_1} + (y - y')\overline{e_2} + (z - z')\overline{e_3} = \overline{o}.$$

Але вектори $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ лінійно незалежні (оскільки утворюють базис). Отже, за означенням лінійно незалежних векторів:

$$\begin{cases} x - x' = 0, \\ y - y' = 0, \\ z - z' = 0. \end{cases} \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} x = x', \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases}$$

Теорему доведено.

Теорема 2. При додаванні двох векторів їх відповідні координати додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати множаться на це число.