Лекція №8

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія.

Тема 1. Пряма на площині.

п. 1.1. Вступ.

Лінія на площині задається як множина точок цієї площини, що мають деякі, притаманні лише їм геометричні властивості.

Введення на площині системи координат дозволяє визначити положення точки площини заданням двох чисел – її координат, а положення лінії на площині визначати за допомогою рівняння (тобто рівності, що пов'язує координати точок лінії).

Озн. *Рівнянням лінії* (або кривої) на площині Oxy називається таке рівняння $F(x,y)=0$ з двома змінними, якому задовольняють координати x і y кожної точки лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії.

Змінні x і y в рівнянні лінії називаються координатами біжучої точки лінії. Для того, щоб встановити, чи лежить точка на даній лінії, достатньо перевірити, чи задовольняють координати цієї точки рівнянню лінії в обраній системі координат.

Задача про знаходження точок перетину двох ліній, заданих рівняннями $F_1(x,y)=0$ і $F_2(x,y)=0$, зводиться до знаходження точок, координати яких задовольняють рівнянням обох ліній, тобто зводиться до розв'язання системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

п. 1.2. Різні види рівнянь прямої на площині.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами..

1. Рівняння прямої l, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.

т. $M_0(x_0,y_0)$ і $\overline{n}(A,B)$, $\overline{n}\neq\overline{0}$,

$M_0\in l$, $\overline{n}\perp l$.

Нехай т. $M(x,y)$ - біжуча точка прямої l.

Тоді $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ і $\overline{M_0M}\perp\overline{n}$, тому $(\overline{M_0M},\overline{n})=0$. Отже:

$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$ (1) – рівняння прямої, що проходить через т. $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A,B)$.

2. Канонічне рівняння прямо l (рівняння прямої l, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору).

т. $M_0(x_0,y_0)$ і $\overline{a}(m,n)$, $\overline{a}\neq\overline{0}$,

$M_0\in l$, $\overline{a}\parallel l$.

Вектор $\overline{a}$ називають напрямним вектором прямої l.

Нехай т. $M(x,y)$ - біжуча точка прямої l.

Тоді $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ і $\overline{M_0M}$, $\overline{a}$ - колінеарні. Отже:

$\boxed{\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}}$ (2) – рівняння прямої, що проходить через т. $M_0(x_0,y_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(m,n)$.

3. Рівняння прямої l, що проходить через дві задані точки.
т. $M_1(x_1, y_1)$, т. $M_2(x_2, y_2)$.
Нехай т. $M(x, y)$ - біжуча точка прямої l.
Тоді $\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1)$ і $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Оскільки, $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$ - колінеарні, то:
$\boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}}$ (3) – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

4. Рівняння прямої l, що проходить через задану точку в даному напрямі.
Нехай пряма l проходить через т. $M_0(x_0, y_0)$ і її напрям характеризується кутовим коефіцієнтом k (тангенс кута нахилу прямої до осі Ox).
Рівняння цієї прямої можна записати у вигляді:
$y = kx + b$, де b - стала, яка поки що невідома. Оскільки пряма l проходить через т. $M_0(x_0, y_0)$, то координати цієї точки задовольняють її рівняння, тобто $y_0 = kx_0 + b$, тоді $b = y_0 - kx_0$. Отже, $y = kx + y_0 - kx_0$ або
$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$ (4) – рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом.

5. Рівняння прямої у відрізках по осях.
Нехай пряма l перетинає вісь Ox в т. $M_1(a, 0)$, а вісь Oy - в т. $M_2(0, b)$.
Використовуючи рівняння (3), отримаємо:
$\dfrac{y-0}{b-0} = \dfrac{x-a}{0-a}$, тобто:
$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ (5) – рівняння прямої у відрізках по осях.

п.1.3. Загальне рівняння прямої на площині.

Усі одержані вище рівняння (1-5) прямої лінії є рівняннями першого степеня відносно змінних x і y, тобто лінійними рівняннями.

Рівняння виду $\boxed{Ax + By + C = 0}$ (*), де A, B, C - сталі, називається лінійним відносно змінних x і y. В цьому рівнянні A і B одночасно не дорівнюють нулю.

Твердження. Будь-яка пряма, що лежить в площині Oxy, визначається рівнянням виду (*). І навпаки, кожне рівняння виду (*) визначає на площині Oxy пряму.

Озн. Рівняння (*) називається загальним рівнянням прямої на площині.

Зауваження. Коефіцієнти A і B при невідомих x і y в рівнянні (*) є координатами вектора $\overline{n} \perp l$.

Деякі частинні випадки загального рівняння прямої.

1. Якщо $A = 0$, то рівняння (*) прийме вигляд $y = -\dfrac{C}{B}$. Це є рівняння прямої, яка паралельна осі Ox.

2. Якщо $B = 0$, то рівняння (*) прийме вигляд $x = -\dfrac{C}{A}$. Це є рівняння прямої, яка паралельна осі Oy.

3. Якщо $C = 0$, то рівняння (*) прийме вигляд $Ax + By = 0$. Це є рівняння прямої, яка проходить через початок координат.

п. 1.4. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами.

1) нехай відомі координати напрямних векторів $\overline{a_1}(m_1, n_1)$ і $\overline{a_2}(m_2, n_2)$ прямих $l_1\, i\, l_2$.

Тоді $$\boxed{\cos\varphi = \frac{(a_1, a_2)}{|a_1|\cdot|a_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{{m_1}^2 + {n_1}^2}\cdot\sqrt{{m_2}^2 + {n_2}^2}}}$$

Звідси $\boxed{\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}}$ - умова паралельності прямих $l_1\, i\, l_2$.

$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$ - умова перпендикулярності прямих $l_1\, i\, l_2$.

2) нехай прямі $l_1\, i\, l_2$ задані загальними рівняннями:

$l_1;\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$,

$l_2;\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Тоді $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}}}$

Звідси $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}}$- умова паралельності прямих $l_1\, i\, l_2$.

$\boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0}$ - умова перпендикулярності прямих $l_1\, i\, l_2$.

3) Нехай прямі $l_1\, i\, l_2$ задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$l_1:\ y = k_1 x + b_1$,

$l_2:\ y = k_2 x + b_2$.

При цьому $k_1 = tg\alpha_1,\ k_2 = tg\alpha_2$.

Тоді $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$.

Остаточно $\boxed{tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$

$\boxed{k_1 = k_2}$ - умова паралельності прямих $l_1\, i\, l_2$

$1 + k_1 k_2 = 0$ або $\boxed{k_2 = -\dfrac{1}{k_1}}$ - умова перпендикулярності прямих $l_1\, i\, l_2$.

п. 1.4. Відстань від точки до прямої.

Нехай пряма l задана загальним рівнянням: $Ax + By + C = 0$ і т. $M_0(x_0, y_0)$ - довільна точка. Знайдемо відстань d від т. M_0 до прямої l.

$$d = \left|np_{\bar{n}}\overline{M_1 M_0}\right| = \frac{(\overline{M_1 M_0}, \bar{n})}{|\bar{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

але $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Тоді остаточно

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \quad (6)$$ – відстань від точки до прямої.