Лекція №9

Тема 2. Площина у просторі.

п. 2.1. Різні види рівнянь площини у просторі.

Площина у просторі геометрично може бути задана різними способами.

1. Рівняння площини α, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.

т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $\bar{n}(A, B, C)$, $\bar{n} \neq \bar{0}$.

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, $\bar{n}(A, B, C) \perp \alpha$.

Нехай т. $M(x, y, z)$ - біжуча точка площини α.

Тоді вектори $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ і $\bar{n}(A, B, C)$-

перпендикулярні. Отже, $(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0$. Тому

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$ (1) – рівняння площини через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\bar{n}(A, B, C)$.

2. Рівняння площини α, яка проходить через задану точку, паралельно двом неколінеарним векторам.

$\overline{a_1}(m_1, n_1, p_1), \overline{a_2}(m_2, n_2, p_2)$ - два неколінеарних вектори.

$\overline{a_1} \parallel \alpha$, $\overline{a_2} \parallel \alpha$ і $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$,

Нехай т. $M(x, y, z)$ - біжуча точка площини α.

Тоді вектори $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$,

$\overline{a_1}(m_1, n_1, p_1), \overline{a_2}(m_2, n_2, p_2)$ - компланарні.

Отже, $(\overline{M_0M}, \overline{a_1}, \overline{a_2})$=0, тобто

$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$ (2) – рівняння площини , що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно двом неколінеарним векторам $\overline{a_1}(m_1, n_1, p_1), \overline{a_2}(m_2, n_2, p_2)$.

3. Рівняння площини α, яка проходить через три задані точки.

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2 z_2), M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$.

Нехай т. $M(x, y, z)$ - біжуча точка площини α.

Тоді вектори $\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$,

$\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ -

Компланарні.

Отже, $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3})$=0, тобто

$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$ (3) – рівняння площини, що проходить через три задані точки

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2 z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$

4. Рівняння площини у відрізках по осях координат.

Нехай площина α відтинає від осей координат Ox, Oy, Oz відповідно відрізки a, b, c відповідно, тобто проходить через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Підставляючи координати цих точок в рівняння (3), матимемо

$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$. Розкриваючи визначник, отримаємо:

$bcx + acy + abz = abc$ або

$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$ (4) – рівняння площини у відрізках по осях.

п. 2.2. Загальне рівняння площини.

Усі одержані вище рівняння (1-3) площини є рівняннями першого степеня відносно змінних x, y, z, тобто лінійними рівняннями.

Рівняння виду $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ (*), де A, B, C, D - сталі, називається лінійним відносно змінних x, y, z. В цьому рівнянні A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Твердження. Будь-яка площина в системі координат $Oxyz$, визначається рівнянням виду (*). І навпаки, кожне рівняння виду (*) визначає в системі координат $Oxyz$ площину.

Озн. Рівняння (*) називається *загальним рівнянням площини*.

Зауваження. Коефіцієнти A, B, C при невідомих x, y, z в рівнянні (*) є координатами вектора $\overline{n}$, перпендикулярного площині α.

Деякі частинні випадки загального рівняння площини.

1. Якщо $D = 0$, то рівняння (*) прийме вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Це є рівняння площини, яка проходить через початок координат.

2. Якщо $C = 0$, то рівняння (*) прийме вигляд $Ax + By + D = 0$. Це є рівняння площини, яка паралельна осі Oz. Якщо $B = 0$, то площина паралельна осі Oy. Якщо $A = 0$, то площина паралельна осі Ox.

3. Якщо $A = B = 0$, то рівняння (*) прийме вигляд $z = -\frac{D}{C}$. Це є рівняння площини, яка паралельна площині Oxy. Аналогічно, якщо $B = C = 0$, то площина паралельна Oyz. Якщо $A = C = 0$, то площина паралельна Oxz.

4. Якщо $A = B = D = 0$, то рівняння (*) прийме вигляд $z = 0$ - це рівняння площини Oxy. Аналогічно $y = 0$ - рівняння площини Oxz, а $x = 0$ - рівняння площини Oyz.

п. 2.3. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.

Нехай площини α_1 *і* α_2 задано загальними рівняннями:

$\alpha_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\alpha_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Двогранний кут φ між площинами вимірюється лінійним кутом між векторами $\overline{n_1}$ *і* $\overline{n_2}$, перпендикулярними до площин.

$\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ *і* $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$. Тому

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

Якщо $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, тому

$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$ - умова перпендикулярності площин.

Якщо $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ - колінеарні, тому

$\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}}$ - умова паралельності площин.

п. 2.4. Відстань від точки до площини.

Нехай площина α задана своїм загальним рівнянням:

$\alpha;\ Ax + By + Cz + D = 0$.

Т. $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ - довільна точка простору.

Проводячи міркування, аналогічні п. 1.4., отримаємо

$\boxed{d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$ (5) – відстань від точки до площини.

Тема 3. Пряма у просторі.

п. 3.1. Різні види рівнянь прямої у просторі.

Пряма у просторі геометрично може бути задана різними способами.

1. Канонічні рівняння прямої l (рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору).

т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $\overline{a}(m, n, p)$, $\overline{a} \neq \overline{0}$,

$M_0 \in l$, $\overline{a} \parallel l$.

Вектор $\overline{a}$ називають напрямним вектором прямої l.

Нехай т. $M(x, y, z)$ - біжуча точка прямої l.

Тоді $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ і $\overline{M_0M}$, $\overline{a}$ - колінеарні. Отже:

$\boxed{\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}}$ (1) – рівняння прямої, що проходить через т. $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\overline{a}\,(m, n)$.

2. Параметричні рівняння прямої l.

Якщо відношення (2) прирівняти до числа t, яке будемо називати параметром, то одержимо:

$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} = t$. Або

$\boxed{\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases}}$ (2) – параметричні рівняння прямої у просторі.

3. Рівняння прямої l, що проходить через дві задані точки.

т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, т. $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Нехай т. $M(x, y, z)$ - біжуча точка прямої l.

Тоді $\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ і $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Оскільки, $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$ - колінеарні, то:

$\boxed{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$ (3) – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

п. 3.2. Загальні рівняння прямої у просторі.

Розглянемо випадок, коли пряма у просторі задається перетином двох непаралельних площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії.

Розглянемо систему рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (4)$$

Кожне рівняння цієї системи визначає площину. Якщо ці площини непаралельні (координати векторів $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ непропорціональні), то система визначає пряму l як геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють кожне рівняння системи.

Озн. Рівняння (4) називають *загальними рівняннями прямої у просторі*.

Щоб від загальних рівнянь прямої перейти до канонічних потрібно знайти $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить прямій та її напрямний вектор $\overline{a}(m, n, p)$. При цьому координати т. M_0 знаходять як частинний розв'язок системи (4), а координати вектора $\overline{a}$ як векторний добуток векторів $\overline{n_1}$ *і* $\overline{n_2}$.

п. 3.3. Кут між двома прямими у просторі.

Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Нехай прямі l_1 *і* l_2 задані своїми канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1},$$

$$l_2: \frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{p_2}.$$

Під кутом φ між цими прямими розуміють кут між їх напрямними векторами $\overline{a_1}(m_1, n_1, p_1)$ і $\overline{a}(m_2, n_2, p_2)$. Тому має місце формула:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\overline{a_1}, \overline{a_2})}{|\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}}$$ - кут між прямими у просторі.

Тоді $\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$ - умови паралельності прямих у просторі,

$\boxed{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0}$ - умови перпендикулярності прямих у просторі.