Лекція №1

Змістовий модуль 1. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля.

Тема 1. Кратні (подвійні та потрійні) інтеграли.

п. 1.1. Задача, які приводять до поняття подвійного інтеграла.

Задача про об'єм циліндричного брусу.

Розглянемо тіло, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу замкненою обмеженою областю D площини XOY, з боків – циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямною є межа області D. Таке тіло будемо називати *циліндричним брусом*. Знайдемо його об'єм V.

Для цього розіб'ємо область D довільними кривими на n елементарних частин D_i, $i = 1,...,n$, площі яких позначимо через ΔS_i. Через точки цих кривих проведемо прямі паралельні Oz. Тоді циліндричний брус складатиметься з n елементарних циліндричних брусів з основами D_i. В кожній частині D_i навмання виберемо точку $M_i(x_i, y_i)$. Будемо вважати кожен елементарний брус циліндром з основою D_i і висотою $f(M_i)$. Тоді об'єм кожного елементарного брусу буде наближено рівний $\Delta V_i \approx f(M_i) \cdot \Delta S_i$.

Тоді об'єм всього циліндричного брусу:

$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i$. Ця рівність тим точніша, чим більше n і чим менше розміри D_i.

Нехай $\lambda = \max d_i$, де d_i - діаметр D_i, $i = 1,...,n$. Тоді точне значення об'єму одержимо як границю суми при умові, що $n \to \infty$ і $\lambda \to 0$. Тобто:

$$\boxed{V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i} \qquad (1)$$

Задача про масу матеріальної пластини.

Нехай D – замкнена обмежена область в системі координат XOY. Розглянемо матеріальну пластину, що займає область D, по якій розподілено масу з густиною $\mu = \mu(x, y)$. Знайдемо масу m такої пластини.

Розіб'ємо область D довільними кривими на n елементарних частин D_i, $i = 1,...,n$, площі яких позначимо через ΔS_i. В кожній з цих частин навмання виберемо точку $M_i(x_i, y_i)$. Знайдемо масу Δm_i елементарної частинки D_i, вважаючи, що вона однорідна і густина в кожній її точці дорівнює $\mu(M_i) = \mu(x_i, y_i)$. Тоді :

$$\Delta m_i \approx \mu(M_i) \cdot \Delta S_i, \qquad m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i) \cdot \Delta S_i.$$

Нехай $\lambda = \max d_i$, де d_i - діаметр D_i, $i = 1,...,n$. Тоді точне значення маси одержимо як границю цієї суми при умові, що $n \to \infty$ і $\lambda \to 0$. Тобто:

$$\boxed{m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i) \cdot \Delta S_i} \qquad (2)$$

п. 1.2. Означення подвійного інтеграла.

Подвійний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних.

Нехай D – замкнена обмежена область в системі координат XOY. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в області D. Розіб'ємо область D довільними кривими на n елементарних частин D_i, $i = 1,...,n$, площі яких позначимо через ΔS_i. В кожній з цих частин навмання виберемо точку $M_i(x_i, y_i)$. Розглянемо добутки $f(M_i) \cdot \Delta S_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$.

Складемо суму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i$, яку називають інтегральною сумою функції $f(x, y)$ в області D.

Нехай $\lambda = \max d_i$, де d_i - діаметр D_i, $i = 1,...,n$.

Озн. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що $\lambda \to 0$, і ця границя не залежить ні від способу розбиття області D на частини, ні від вибору точок M_i, то її називають *подвійним інтегралом від функції* $f(x, y)$ *по області* D і позначають:

$$\iint_D f(x, y)dxdy \text{ або } \iint_D f(x, y)dS.$$

При цьому функція $f(x, y)$ називається *інтегрованою в області* D.

Тут: D називається областю інтегрування,

$f(x, y)$ - підінтегральною функцією,

x, y - змінними інтегрування,

$dxdy$ або dS - елементом площі.

Отже:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i} \qquad (3)$$

Теорема 1. (достатня умова інтегрованості функції) Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкнутій обмеженій області D, то вона інтегрована в цій області.

Зауваження. Порівнюючи формули (1) і (2) матимемо:

$$\boxed{V = \iint_D f(x, y)dxdy} \text{ (4) – об'єм циліндричного брусу.}$$

Формула (4) виражає геометричний зміст подвійного інтеграла.

Порівнюючи формули (1) і (3) матимемо:

$$\boxed{m = \iint_D \mu(x, y)dxdy} \text{ (5) – маса матеріальної пластини.}$$

Формула (5) виражає механічний зміст подвійного інтеграла.

п. 1.3. Властивості подвійного інтеграла.

Будемо вважати підінтегральні функції інтегрованими.

1. $\iint_D c \cdot f(x, y)dxdy = c \cdot \iint_D f(x, y)dxdy, \quad c = const$.

2. $\iint_D (f(x, y) + g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_D g(x, y)dxdy$.

3. Якщо область D розділити лінією на дві області D_1 і D_2 так, щоб $D_1 \cup D_2 = D$, а перетин D_1 і D_2 складається лише з лінії, що їх розділяє, то:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy .$$

4. Якщо $f(x, y) \geq 0$ в області D, то $\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0$.

5. Якщо $f(x, y) \geq g(x, y)$ в області D, то $\iint_D f(x, y)dxdy \geq \iint_D g(x, y)dxdy$.

6. $\iint_D dS = S$ або $\iint_D dxdy = S$, де S - площа області D.

7. Якщо функція $f(x,y)$ - неперервна в замкнутій обмеженій області D, площа якої дорівнює S, то $mS \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MS$, де m і M - відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D.

п. 1.4. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах.

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення двох визначених інтегралів.

Нехай замкнена і обмежена область D задовольняє таким умовам:

1) D проектується на Ox у відрізок $[a, b]$;

2) для кожної внутрішньої точки x області D пряма, яка проходить через цю точку паралельно Oy, перетинає межу D не більше, ніж в двох точках.

Таку область D будемо в подальшому називати *правильною вздовж* Oy.

Область D, яка є правильною вдовж Oy, обмежена з боків прямими $x = a$, $x = b$, знизу– кривою $y = \varphi_1(x)$, а зверху – кривою $y = \varphi_2(x)$. Тут функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$- неперервні на $[a, b]$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x, y)$ - інтегрована в області D, а D - правильна вдовж Oy, то має місце формула для обчислення подвійного інтеграла:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx} \quad (6)$$

Ця формула зазвичай записується у вигляді:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy} \quad (7)$$

Формула (7) являє собою спосіб обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах. Праву частину цієї формули називають *повторним інтегралом від функції* $f(x, y)$ *по області* D. При цьому інтеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ називають внутрішнім інтегралом.

При обчисленні повторного інтеграла (7) спочатку беремо внутрішній інтеграл, вважаючи x сталою, після цього беремо зовнішній інтеграл, тобто результат першого інтегрування інтегруємо по x в межах від a до b.

Якщо область D обмежена знизу і зверху прямими $y = c$, $y = d$, з боків кривими $x = \phi_1(y)$ *і* $x = \phi_2(y)$, при цьому $\phi_1(y) \leq \phi_2(y)$ для всіх $y \in [c, d]$, тобто область D - *правильна вздовж осі* Ox, то має місце формула:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)dx} \quad (8)$$

В формулі (8) при обчисленні внутрішнього інтеграла вважають y сталою.

Зауваження 1. Якщо область D правильна в обох напрямах, то подвійний інтеграл можна обчислювати як по формулі (7), так і по формулі (8) (кажуть в різних напрямах).

Зауваження 2. Якщо область D не є правильною, то для обчислення подвійного інтеграла її розбивають на правильні області і обчислюють інтеграл на підставі властивості 3.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, D: $y = x^2$, $y = -x$, $x = 2$.

Приклад 2. Змінити напрям інтегрування $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x + 2y)dx$.

п. 1.5. Застосування подвійного інтеграла
в геометрії:

1. $\boxed{\iint\limits_D dxdy = S}$ - площа області D.

2. $\boxed{\iint\limits_D f(x, y)dxdy = V}$ - об'єм циліндричного брусу ($f(x,y) \geq 0$ в D).

в **механіці:**

1. $\boxed{\iint\limits_D \mu(x, y)dxdy = m}$ - маса матеріальної пластини з густиною $\mu(x, y)$.

2. Координати центра мас матеріальної пластини з густиною $\mu(x, y)$:

$$\boxed{x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x \cdot \mu(x, y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x, y)dxdy}}$$ - абсциса центра мас;

$$\boxed{y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y \cdot \mu(x, y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x, y)dxdy}}$$ - ордината центра мас.

3. Моменти інерції матеріальної пластини з густиною $\mu(x, y)$:

$\boxed{I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \mu(x,y)dxdy}$ - момент інерції відносно осі Ox;

$\boxed{I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \mu(x,y)dxdy}$ - момент інерції відносно осі Oy;

$\boxed{I_o = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \cdot \mu(x,y)dxdy}$ - момент інерції відносно початку координат.

Приклад 3. Знайти масу пластини D, що обмежена лініями: $y = 0$, $x + y = 2$, $y = x^2$, якщо густина в кожній точці визначається функцією $\mu = y^2 x$.

Приклад 4. Знайти момент інерції пластини відносно осі Ox, якщо пластина обмежена лініями: $y = 0$, $x + y = 1$, $y - x = 1$, якщо густина в кожній точці пластини дорівнює ордината цієї точки.