Лекція №10

Змістовий модуль 2. Ряди.

Тема 1. Числові ряди.

п. 1.1. Основні поняття.

Озн. *Числовим рядом* U називається вираз виду:

$$\boxed{u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}, \qquad (1)$$

де $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ - дійсні числа, які називають *членами ряду*, u_n - *загальним членом ряду*.

Ряд U вважають заданим, якщо відомий його загальний член u_n, виражений як функція номеру члену ряду n: $u_n = f(n)$.

Озн. Сума перших n членів ряду U називається n *- ю частинною сумою ряду* U і позначається S_n, тобто:

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n}.$$

Отже:

$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$ і т. д.

Озн. Якщо існує скінченна границя $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ послідовності частинних сум ряду U, то цю границю називають *сумою ряду* U і кажуть, що ряд U збіжний. Пишуть $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Озн. Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд U називають *розбіжним*. Розбіжний ряд суми не має.

З'ясувати питання збіжності наступних рядів.

Приклад 1. Ряд 0+0+…+0+… .

Приклад 2. Ряд 1+1+…+1+… .

Приклад 3. Ряд 1-1+1-1+1-1+… .

Приклад 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Властивості числових рядів.

1. Якщо ряд U збіжний і його сума дорівнює S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = cu_1 + cu_2 + ... + cu_n + ...,$$

де c - довільне число, також збіжний і його сума дорівнює cS. Якщо ж ряд U розбіжний і $c \neq 0$, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ - розбіжний.

2. Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються, а їх суми рівні S_1 *і* S_2, то збігаються і ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ і їх суми відповідно рівні $S_1 \pm S_2$

З властивості 2 випливає, що сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжний ряд.

Зауважимо, що сума (різниця) двох розбіжних рядів може бути як збіжним, так і розбіжним рядом.

3. Якщо до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ додати (або відкинути) скінченну кількість членів, то одержаний ряд і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Озн. Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ називається n *- м залишком ряду*. Його одержують з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ відкиданням n перших членів ряду. Очевидно, що, за властивістю 3, ряд і його залишок збігаються або розбігаються одночасно.

п. 1.2. Ряд геометричної прогресії.

Дослідимо на збіжність ряд:

$$\boxed{a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \qquad (a \neq 0)}, \qquad (2)$$

який називається *рядом геометричної прогресії*.

Як відомо, сума n перших членів геометричної прогресії знаходиться за формулою $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Знайдемо границю цієї суми:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

Розглянемо наступні випадки в залежності від величини q.

1. Якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Тому $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, ряд (2) збіжний і його сума $S = \frac{a}{1-q}$.
2. Якщо $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тому $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ і ряд (2) розбіжний.
3. Якщо $q = 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Якщо $q = -1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує. Отже, в обох випадках ряд (2) розбіжний.

Таким чином ряд геометричної прогресії збіжний, коли $|q| < 1$ і розбіжний, коли $|q| \geq 1$.

п. 1.3. Необхідна ознака збіжності числового ряду. Гармонічний ряд.

Теорема (необхідна ознака збіжності). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim_{n\leftarrow\infty} u_n = 0$.

Наслідок (достатня умова розбіжності). Якщо $\lim_{n\leftarrow\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$.

Зауваження. Теорема дає лише необхідну умову збіжності ряду, але не достатню. Це означає, що існують розбіжні ряди, для яких $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. В якості прикладу розглянемо так званий гармонічний ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, але гармонічний ряд є розбіжним.