Лекція №11

п. 1.4. Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів.

Необхідна ознака збіжності не дає можливості судити про те, збіжний ряд чи ні. Збіжність чи розбіжність ряду в багатьох випадках можна встановити за допомогою так званих достатніх ознак.

Розглянемо деякі з них для знакодатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами. Знакододатний ряд переходить у знаковід'ємний шляхом множення його на (-1), що, як відомо, не змінює збіжність ряду.

п. 1.4.1. Ознаки порівняння.

За цими ознаками збіжність чи розбіжність знакододатного ряду встановлюється шляхом порівняння його з іншим еталонним рядом, про який відомо збіжний він чи розбіжний.

Теорема 1. Нехай дано два знакододатні ряди:

$$U: \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots;$$
$$V: \quad v_1 + v_2 + \ldots. + v_n + \ldots.$$

Якщо для всіх n виконується нерівність $\boxed{u_n \le v_n}$, то :

1) з розбіжності ряду U слідує розбіжність ряду V ;
2) із збіжності ряду V слідує збіжність ряду U .

Зауваження 1. Теорема 1 справедлива і в тому випадку, коли нерівність $u_n \le v_n$ виконується не для всіх членів рядів, а починаючи з деякого номера N . Це випливає з властивості 3 числових рядів.

Зауваження 2. В якості еталонних рядів для порівняння можна брати наступні:

- ряд геометричної прогресії: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n - \begin{cases} зб., & |q| < 1, \\ розб., & |q| \ge 1. \end{cases}$

- узагальнений гармонічний ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \begin{cases} зб., & \alpha > 1, \\ розб., & \alpha \le 1. \end{cases}$

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). **.** Нехай дано два знакододатні ряди:

$$U: \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots;$$
$$V: \quad v_1 + v_2 + \ldots. + v_n + \ldots.$$

Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \ (0 < A < \infty)$, то ряди U *і* V збігаються або розбігаються одночасно.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^3}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 + 2^n}; \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+3}; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{5n}.$$

п. 1.4.2. Ознака Даламбера.

Теорема 3. Нехай дано ряд U: $\quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ з додатними членами і існує границя

$\boxed{D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}}$. Тоді , якщо:

1) $D < 1$, то ряд U - збіжний;
2) $D > 1$, то ряд U - розбіжний;
3) $D = \infty$, то ряд U - розбіжний;
4) $D = 1$, то питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Зауваження. Ознаку Даламбера доцільно застосовувати, коли загальний член ряду містить вираз виду $n!$ або a^n .

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

п. 1.4.3. Радикальна ознака Коші.

Теорема 4. Нехай дано ряд U: $u_1+u_2+...+u_n+...$ з додатними членами і існує границя $\boxed{K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}}$. Тоді , якщо:

1) $K<1$, то ряд U - збіжний;
2) $K>1$, то ряд U - розбіжний;
3) $K=\infty$, то ряд U - розбіжний;
4) $K=1$, то питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Зауваження. Радикальну ознаку Коші доцільно застосовувати, коли загальний член ряду містить вираз, що підноситься до степеня n.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

п. 1.4.4. Інтегральна ознака Коші.

Теорема 5. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ - знакододатний, а функція $f(x)$ - неперервна та монотонно спадна на проміжку $[1;\,+\infty)$. При цьому $\boxed{u_n=f(n)}$ для всіх n. Тоді інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Зауваження 1. Невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ є збіжним, якщо його значення скінченне. В інших випадках інтеграл є розбіжним.

Зауваження 2. Замість інтеграла $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ можна брати інтеграл $\int_k^{+\infty}f(x)dx,\ k\in N,\ k>1$, оскільки відкидання k перших членів ряду не вплине на його збіжність.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.