Лекція №12

п. 1.5. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца.

Озн. *Знакопочережним рядом* називається ряд виду:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n \qquad (1)$$

де $u_n > 0$ для всіх $n \in N$ (тобто ряд, додатні і від'ємні члени якого слідують один за одним почергово).

Для знакопочережних рядів має місце така достатня ознака збіжності.

Теорема 1. (Ознака Лейбніца). Знакопочережний ряд (1) збігається, якщо:

1) члени ряду монотонно спадають за абсолютною величиною, тобто:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots;$$

2) загальний член ряду (1) прямує до нуля, тобто: $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$.

При цьому сума S ряду (1) задовольняє нерівності:

$$\boxed{0 < S < u_1}.$$

Зауваження 1.

Дослідження знакопочережного ряду виду

$$-u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n \qquad (2)$$

зводиться шляхом множення всіх його членів на (-1) до дослідження ряду (1).

Зауваження 2.

Співвідношення $0 < S < u_1$ дозволяє отримати просту і зручну оцінку похибки, яку ми припускаємо, замінюючи суму S даного ряду його частинною сумою S_n. Відкинутий ряд (залишок) являє собою також знакопочережний ряд, сума якого за модулем менше першого члена цього ряду u_{n+1}. Тому похибка менше модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто:

$$\boxed{|S - S_n| < u_{n+1}}.$$

Приклад 1. Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}$ з точністю до 0,0001.

п. 1.6. Загальна достатня ознака збіжності знакозмінних рядів. Абсолютна і умовна збіжність.

Озн. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість додатних і від'ємних членів, називається *знакозмінним рядом.*

Для знакозмінних рядів має місце наступна загальна ознака збіжності.

Теорема 2. Нехай дано знакозмінний ряд U:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Якщо збігається ряд $|U|$:

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

складений з модулів членів даного ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд U.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}$.

Зауваження. Обернене твердження в загальному випадку неправильне. Тобто, якщо збігається ряд U, то не обов'язково збігається ряд $|U|$. На підтвердження цього факту розглянемо приклад.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$.

Озн. Знакозмінний ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд, складений з модулів його членів, збіжний.

Озн. Знакозмінний ряд називається *умовно збіжним*, якщо сам ряд збіжний, а ряд, складений з модулів його членів, розбіжний.

Тоді ряд з прикладу 2 – абсолютно збіжний, а ряд з прикладу 3 – умовно збіжний.

Зауваження. Абсолютно збіжні ряди додаються, віднімаються, перемножуються як звичайні ряди. Суми таких рядів не залежать від порядку запису членів. У випадку умовно збіжних рядів відповідні твердження не мають місця.

Тема 2. Функціональні ряди.

п. 2.1. Основні поняття.

Озн. Ряд, членами якого є функції від x, називається *функціональним*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots\ . \quad \textbf{(1)}$$

Надаючи x певного значення x_0 ми отримаємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots, \quad \textbf{(2)}$$

який може бути як збіжним так і розбіжним.

Озн. Якщо одержаний числовий ряд (2) збіжний, то точка x_0 називається *точкою збіжності ряду* (1); якщо ряд (2) розбіжний, то точка x_0 називається *точкою розбіжності* ряду (1).

Озн. Сукупність числових значень аргументу x, при яких функціональний ряд збігається, називається його *областю збіжності.*

В області збіжності функціонального ряду його сума є деякою функцією від x, тобто: $S=S(x)$. В області збіжності вона визначається рівністю:

$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, де $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ - частинна сума ряду.

Приклад 4. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

Приклад 5. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}$.

Озн. Функціональний ряд, членами якого є степеневі функції аргументу x, називається *степеневим рядом.* Це ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (3)$$

Дійсні числа $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ називаються коефіцієнтами ряду (3).

Ряд (3) є степеневим рядом за степенями x. Розглядають також степеневий ряд за степенями $(x-x_0)$, тобто ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (4)$$

де x_0 - деяка стала.

Легко бачити, що за допомогою підстановки $x-x_0=z$ зводиться до ряду (3).