Лекція №13

п. 2.2. Теорема Абеля.
Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду.

Нехай дано степеневий ряд:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots} \quad (1)$$

Легко бачити, що область збіжності степеневого ряду (1) містить принаймні одну точку $x = 0$. З'ясуємо питання про збіжність цього ряду в інших точках.

Теорема Н. Абеля. Якщо степеневий ряд (1) збіжний при $x \neq x_0$, то він абсолютно збіжний при всіх значеннях x, що задовольняють нерівність $|x_1| < |x_0|$.

Наслідок. Якщо ряд (3) розбіжний при $x = x_1$, то він розбігається при всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Озн. Інтервал $(-R; R)$, де $R > 0$, називається *інтервалом збіжності степеневого ряду* (1), якщо цей ряд є збіжним для всіх $x \in (-R; R)$ і розбіжним для всіх $x \notin [-R; R]$. Число $R > 0$ називають *радіусом збіжності степеневого ряду* (1).

Якщо ряд (1) збігається лише в одній точці $x_0 = 0$, то вважаємо, що $R = 0$. Якщо ж ряд (1) збігається при всіх значеннях $x \in R$, то вважаємо, що $R = \infty$.

Для знаходження інтервалу збіжності степеневого ряду (1) можна діяти так. Складають ряд з модулів, тобто ряд виду: $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$, і застосовують до нього ознаку Даламбера. Припустимо, що існує границя $D = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right|$. За ознакою Даламбера, ряд збіжний, якщо $D < 1$. Знайдений з цієї умови інтервал $(-R; R)$ буде інтервалом збіжності степеневого ряду (1). Область збіжності ряду (1) може відрізнятися від його інтервалу збіжності лише точками $\pm R$ (саме в цих точках $D = 1$). Отже, в точках $x = \pm R$ ряд (1) досліджується окремо.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$.

п. 2.3. Властивості степеневих рядів.

1. Сума $S(x)$ степеневого ряду є неперервною функцією в його інтервалі збіжності.

2. Степеневі ряди, що мають радіуси збіжності відповідно R_1 *і* R_2, можна почленно додавати, віднімати та множити. При цьому радіуси збіжності добутку, суми і різниці рядів не менше, ніж менше з чисел R_1 і R_2.

3. Степеневий ряд всередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати; при цьому для ряду:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (1)$$

при $x \in (-R; R)$ виконується рівність:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots . \quad (2)$$

4. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на кожному відрізку, розташованому всередині інтервалу збіжності; при цьому для ряду (1) при $-R < a < x < R$ виконується рівність:

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n dt + \ldots \quad (3)$$

Ряди (2) і (3) мають той самий інтервал збіжності, що і ряд (1).

Приклад. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$ при $|x|<1$.

п. 2.4. Ряди Тейлора і Маклорена.

Як відомо, для будь-якої функції $f(x)$, яка визначена в околі т. x_0 і має в ній похідні до $(n+1)$-го порядку включно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \quad (1)$$

де $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c\in(x_0,x)$ - залишковий член в формі Лагранжа.

Отже, формулу (1) можна записати у вигляді $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, де

$P_n(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - многочлен Тейлора.

Якщо функція $f(x)$ має похідні довільних порядків (нескінченно разів диференційовна) в околі точки x_0 і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, то з формули Тейлора одержимо розклад функції $f(x)$ за степенями $(x-x_0)$, що називається *рядом Тейлора*:

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad .$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0=0$, то одержимо розклад функції по степенях x в так званий ряд Маклорена:

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n \quad .$$

Ряд Тейлора можна формально побудувати для довільної нескінченно диференційовної функції в околі т. x_0. Але це не означає, що він буде збігатися до функції $f(x)$.

Теорема 1. Для того, щоб ряд Тейлора функції $f(x)$ збігався до $f(x)$ в т. x, необхідно і достатньо, щоб в цій точці залишковий член формули Тейлора прямував до нуля при $n\to\infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

На практиці часто користуються наступною теоремою, яка дає просту достатню умову розкладності функції в ряд Тейлора.

Теорема 2. Якщо модулі всіх похідних функції $f(x)$ обмежені в околі т. x_0 одним і тим самим числом $M>0$, то для довільного x з цього околу ряд Тейлора функції $f(x)$ збігається до функції $f(x)$.