Лекція №14

п. 2.5. Розклад деяких елементарних функцій в ряд Тейлора (Маклорена).

Для розкладу функцій $f(x)$ в ряд Маклорена потрібно:

1) знайти похідні $f'(x),\ f''(x),\dots,\ f^{(n)}(x),\ \dots$;

2) обчислити значення похідних в точці $x_0 = 0$;

3) написати ряд Маклорена для заданої функції і знайти його інтервал збіжності;

4) знайти інтервал $(-R;\ R)$, в якому залишковий член ряду Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо такий інтервал існує, то в ньому функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена співпадають.

Наведемо таблицю , що містить розклади в ряд Маклорена деяких елементарних функцій:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,\qquad x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,\qquad x \in (-\infty;\ +\infty)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,\qquad x \in (-\infty;\ +\infty)$.

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots,\qquad x \in \begin{cases} [-1;1], & \alpha \ge 0, \\ (-1;\ 1], & -1 < \alpha < 0, \\ (-1;\ 1), & \alpha \le -1. \end{cases}$

5. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots,\qquad x \in (-1;\ +1)$.

6. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n + \dots,\qquad x \in (-1;\ +1)$.

7. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots,\qquad x \in (-1;\ +1]$.

8. $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,\qquad x \in [-1;\ 1]$.

9. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,\qquad x \in [-1;\ 1]$.

п. 2.6. Деякі застосування степеневих рядів.

Приклад 1. Знайти $\sin 1$ з точністю до 0, 001.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

Приклад 3. Методом послідовного диференціювання знайти перші п’ять членів (відмінних від нуля) розкладу в ряд розв’язку рівняння $y'' = x^2 + y^2,\quad y(-1) = 2,\quad y'(-1) = \frac{1}{2}$.