Лекція №2

п. 1.5. Задача, яка приводить до поняття потрійного інтеграла.
Задача про масу матеріального тіла.

Нехай Ω – замкнена обмежена область в системі координат $OXYZ$. Розглянемо матеріальне тіло, що займає область Ω. Знайдемо масу m такого тіла, якщо густина в кожній точці цього тіла $\mu = \mu(x,\ y,\ z)$.

Розіб'ємо область Ω довільними поверхнями на n елементарних частин Ω_i, $i = 1,...,n$, об'єми яких позначимо через ΔV_i. В кожній з цих частин навмання виберемо точку $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$. Знайдемо масу Δm_i елементарної частинки Ω_i, вважаючи, що вона однорідна і густина в кожній її точці дорівнює $\mu(M_i) = \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)$.

Тоді: $\Delta m_i \approx \mu(M_i)\cdot \Delta V_i$, $\quad m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(M_i)\cdot \Delta V_i$.

Нехай $\lambda = \max d_i$, де d_i - діаметр Ω_i, $i = 1,...,n$. Тоді точне значення маси одержимо як границю цієї суми при умові, що $n \to \infty$ і $\lambda \to 0$. Тобто:

$$\boxed{m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\cdot \Delta V_i} \qquad (1)$$

п. 1.2. Означення потрійного інтеграла.

Потрійний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла на випадок функції трьох змінних.

Нехай Ω – замкнена обмежена область в системі координат $OXYZ$. Нехай функція $f(x,\ y,\ z)$ визначена в області Ω. Розіб'ємо область Ω довільними поверхнями на n елементарних частин Ω_i, $i = 1,...,n$, об'єми яких позначимо через ΔV_i. В кожній з цих частин навмання виберемо точку $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$. Розглянемо добутки $f(M_i)\cdot \Delta V_i = f(x_i,\ y_i,\ z_i)\cdot \Delta V_i$.

Складемо суму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta V_i$, яку називають інтегральною сумою функції $f(x, y,\ z)$ в області Ω.

Нехай $\lambda = \max d_i$, де d_i - діаметр Ω_i, $i = 1,...,n$.

Озн. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що $\lambda \to 0$, і ця границя не залежить ні від способу розбиття області Ω на частини, ні від вибору точок M_i, то її називають *потрійним інтегралом від функції* $f(x, y,\ z)$ *по області* Ω і позначають:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz \text{ або } \iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dv.$$

При цьому функція $f(x, y,\ z)$ називається *інтегрованою в області* Ω.

Тут: Ω називається областю інтегрування,

$f(x, y,\ z)$ - підінтегральною функцією,

$x,\ y,\ z$ - змінними інтегрування,

$dxdydz$ або dv - елементом об'єму.

Отже: $$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta V_i} \qquad (2)$$

Теорема 1. (достатня умова інтегрованості функції) Якщо функція $f(x,\ y,\ z)$ неперервна в замкнутій обмеженій області Ω, то вона інтегрована в цій області.

Зауваження 1. Порівнюючи формули (1) і (2) матимемо:

$$\boxed{m = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$$ (3) – маса матеріального тіла.

Формула (3) виражає механічний зміст потрійного інтеграла.

Зауваження 2. Властивості потрійного інтеграла аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

п. 1.3. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.

Обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Нехай замкнена і обмежена область інтегрування Ω задовольняє таким умовам:

1) Ω проектується на XOY в область D, яка є правильною;

2) для кожної внутрішньої точки області D пряма, яка проходить через цю точку паралельно Oz, перетинає межу Ω не більше, ніж в двох точках.

Таку область Ω будемо в подальшому називати *правильною вздовж* Oz.

Нехай Ω обмежена знизу поверхнею $z = z_1(x,\ y)$, зверху – поверхнею $z = z_2(x,\ y)$, при цьому $z_1(x,y)$ *і* $z_2(x,y)$ - неперервні в D і $z_1(x,\ y) \le z_2(x,\ y)$.

Тоді для будь-якої інтегрованої в області Ω функції справедлива формула:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz = \iint\limits_{D}\left(\int\limits_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz\right)dxdy} \quad (4)$$

Нехай область D є правильною вздовж Oy, обмежена з боків прямими $x = a,\ \ x = b$, знизу – кривою $y = \varphi_1(x)$, а зверху – кривою $y = \varphi_2(x)$. Тут функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ - неперервні на $[a,\ b]$. Переходячи в формулі (4) від подвійного інтеграла до повторного, матимемо:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dxdydz} \quad (5)$$

Якщо область D є правильною вздовж Ox, обмежена знизу і зверху прямими $y = c,\ y = d$, з боків кривими $x = \phi_1(y)$ *і* $x = \phi_2(y)$, при цьому $\phi_1(y) \le \phi_2(y)$ для всіх $y \in [c,\ d]$, то має місце формула:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dx \int\limits_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dxdydz} \quad (6)$$

Зауваження. Якщо область Ω не є правильною, то для обчислення потрійного інтеграла її розбивають на правильні області і обчислюють інтеграл на підставі властивості 3.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dxdydz$, Ω: $x = 0, y = 0,\ \ z = 1,\ \ \ x + y + z = 2$.

п. 1.5. Застосування потрійного інтеграла

в геометрії:

1. $\boxed{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = V}$ - об'єм області Ω.

в механіці:

1. $\boxed{m = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - маса матеріального тіла з густиною $\mu(x,\ y,\ z)$.

2. Координати центра мас матеріального тіла з густиною $\mu(x,\ y,\ z)$:

$\boxed{x_c = \dfrac{M_{yz}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dxdydz}}$ - абсциса центра мас;

$\boxed{y_c = \dfrac{M_{xz}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dxdydz}}$ - ордината центра мас;

$\boxed{z_c = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dxdydz}}$ - апліката центра мас.

3. Моменти інерції матеріального тіла з густиною $\mu(x,\ y,\ z)$:

$\boxed{I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - момент інерції тіла відносно осі Ox;

$\boxed{I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - момент інерції тіла відносно осі Oy;

$\boxed{I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - момент інерції тіла відносно осі Oz;

$\boxed{I_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - момент інерції тіла відносно площини YOZ;

$\boxed{I_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - момент інерції тіла відносно площини XOZ;

$\boxed{I_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - момент інерції тіла відносно площини XOY;

$\boxed{I_O = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x,\ y,\ z)dxdydz}$ - момент інерції відносно початку координат.

Приклад 2. Знайти абсцису центра мас однорідного тіла, обмеженого площинами: $x = 0,\ z = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ x + 2z = 3$.