Лекція №3

Тема 2. Заміна змінних в кратних інтегралах.

п. 2.1. Заміна змінних в подвійному інтегралі. Загальний випадок.

Для спрощення обчислення подвійних і потрійних інтегралів часто застосовують метод підстановки, тобто вводять нові змінні під знаком подвійного інтеграла.

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D. Тоді існує інтеграл: $I = \iint_D f(x, y)dxdy$.

Припустимо, що за допомогою формул:

$\boxed{x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)}$ (*)

ми переходимо в подвійному інтегралі I до нових змінних u і v.

Вважатимемо, що:

$\boxed{u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)}$ (**).

Отже, кожній точці $M(x, y) \in D$ ставиться у відповідність точка $M^*(u, v)$ на координатній площині з прямокутними координатами u і v. Нехай множина точок $M^*(u, v)$ утворює замкнену обмежену область D^*.

Теорема. Якщо перетворення (**) переводять замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначними, і, якщо функції (*) мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник:

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix},$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в D, то справедлива така формула заміни змінної в подвійному інтегралі:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |I(u,v)| dudv}. \qquad (1)$$

Тут визначник I називається визначником Якобі або якобіаном.

Зауваження. Виконуючи заміну змінних в подвійному інтегралі за формулами (*) ми маємо елемент площі $dxdy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|I(u,v)| dudv$ в координатах u і v, а стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*.

Приклад. Обчислити $\iint_D (6x - 3y)dxdy$, якщо D- паралелограм, обмежений прямими: $x + y = 1,\ x + y = 2,\ 2x - y = 1,\ 2x - y = 3$.

п. 2.2. Подвійний інтеграл в полярних координатах.

Розглянемо частинний випадок заміни змінних, який часто зустрічається у процесі обчислення подвійних інтегралів, а саме заміну декартових координат x, y полярними координатами $\rho,\ \varphi$.

В якості координат u і v в формулі (1) візьмемо полярні координати ρ і φ. Відомо, що вони пов’язані з декартовими координатами формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Тоді якобіан перетворення:

$$I(\rho,\ \varphi)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix}=$$

Тоді формула переходу в подвійному інтегралі до полярних координат матиме вигляд:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\cdot\rho\, d\rho d\varphi}. \qquad (2)$$

Тут D^* - область в полярній системі координат, що відповідає області D в декартовій системі координат.

Зауваження 1. Отже, при переході в подвійному інтегралі до полярних координат необхідно елемент площі $dxdy$ замінити на $\rho\cdot d\rho d\varphi$.

Зауваження 2. Формулу (2) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння ліній, що обмежують D, містять суму x^2+y^2 , оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2}.$$

Зауваження 3. На практиці, як правило, перехід від області D до області D^* не здійснюють, а суміщають декартову і полярну системи координат і розставляють межі інтегрування в повторному інтегралі правої частини формули (2), користуючись геометричним змістом полярних координат.

Так, якщо область D^* обмежена променями $\varphi=\alpha,\ \ \varphi=\beta$, де $\alpha<\beta$, і кривими $\rho=\rho_1(\varphi),\ \rho=\rho_2(\varphi)$, де $\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$, тобто область D^* - правильна: промінь, що виходе з полюса, перетинає її межу не більше, ніж в двох точках, то праву частину формули (2) можна записати у вигляді:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\cdot\rho\, d\rho d\varphi=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho\, d\rho}$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо $D:\ x^2+y^2=2x,\ \ x^2+y^2=4x$.