Лекція №4

п. 2.3. Заміна змінних в потрійному інтегралі. Загальний випадок.

Нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області Ω. Тоді існує інтеграл: $$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz.$$

Припустимо, що за допомогою формул:

$$\boxed{x=x(u, v, w), \quad y=y(u, v, w), \quad z=z(x, y, w)} \quad (*)$$

ми переходимо в потрійному інтегралі I до нових змінних $u, \ v, \ w$.

Вважатимемо, що:

$$\boxed{u=u(x, y, z), \quad v=v(x, y, z), \quad w=w(x, y, z)} \quad (**).$$

Отже, кожній точці $M(x, y, z)\in\Omega$ ставиться у відповідність точка $M^*(u, v, w)$ на координатній площині з прямокутними координатами $u, \ v, \ w$. Нехай множина точок $M^*(u, v, w)$ утворює замкнену обмежену область Ω^*.

Теорема. Якщо перетворення (**) переводять замкнену обмежену область Ω в замкнену обмежену область Ω^* і є взаємно однозначними, і, якщо функції (*) мають в області Ω^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник:

$$I(u, v, w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix},$$

а функція $f(x, y, z)$ неперервна в Ω, то справедлива така формула заміни змінної в потрійному інтегралі:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} f\left(x(u,v, w), y(u,v, w), z(u,v, w)\right)\cdot\left|I(u,v,w)\right|dudvdw}. \quad (3)$$

Тут визначник I називається визначником Якобі або якобіаном.

Зауваження. Виконуючи заміну змінних в подвійному інтегралі за формулами (*) ми маємо елемент об'єму $dxdydz$ в координатах x, y, z замінити елементом об'єму $\left|I(u,v, w)\right|dudvdw$ в координатах $u, \ v, \ w$, а стару область інтегрування Ω замінити відповідною їй областю Ω^*.

п. 2.4. Потрійний інтеграл в циліндричних координатах.

В якості координат $u, \ v, \ w$ в формулі (3) візьмемо циліндричні координати $\rho, \ \varphi, \ z$. Відомо, що вони пов'язані з декартовими координатами формулами:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases}$$

Тут: $0\le\rho<+\infty, \ 0\le\varphi<2\pi, \ -\infty<z<+\infty$.

Тоді якобіан перетворення:

$$I(\rho, \varphi, z)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix}=$$

Тоді формула переходу в потрійному інтегралі до циліндричних координат матиме вигляд:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho\, d\rho d\varphi dz}. \quad (4)$$

Зауваження 1. Отже, при переході в потрійному інтегралі до циліндричних координат необхідно елемент об'єму $dxdydz$ замінити на $\rho \cdot d\rho d\varphi dz$.

Зауваження 2. Формулу (4) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння поверхонь, що обмежують Ω, містять суму x^2+y^2, оскільки ця сума в циліндричних координатах має досить простий вигляд:

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2}.$$

Поверхня $\rho = const$ - круговий циліндр, прямолінійні твірні якого паралельні осі Oz.

Зауваження 3. На практиці, як правило, перехід від області Ω до області Ω^* не здійснюють, а суміщають декартову і циліндричну системи координат і розставляють межі інтегрування в повторному інтегралі правої частини формули (4), користуючись геометричним змістом циліндричних координат.

Приклад 1. Обчислити $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, якщо Ω: $y=0,\ z=0,\ z=2,\ x^2+y^2=2x.$

Приклад 2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=x^2+y^2$ і $z=1$.

п. 2.5. Потрійний інтеграл в сферичних координатах.

В якості координат $u,\ v,\ w$ в формулі (3) візьмемо сферичні координати $\rho,\ \varphi,\ \Theta$. Відомо, що вони пов'язані з декартовими координатами формулами:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\Theta\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\Theta\sin\varphi, \\ z=\rho\cos\Theta. \end{cases}$$

$0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\Theta\le\pi$.

Тоді якобіан перетворення:

$$I(\rho,\ \varphi,\ \Theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\Theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\Theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\Theta \end{vmatrix}=$$

Тоді формула переходу в потрійному інтегралі до сферичних координат матиме вигляд:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega^*} f(\rho\sin\Theta\cos\varphi,\ \rho\sin\Theta\sin\varphi,\ \rho\cos\Theta)\cdot\rho^2\sin\Theta\, d\rho d\varphi d\Theta}. \quad (5)$$

Зауваження 1. Отже, при переході в потрійному інтегралі до сферичних координат необхідно елемент об'єму $dxdydz$ замінити на $\rho^2\sin\Theta\cdot d\rho d\varphi d\Theta$.

Зауваження 2. Формулу (4) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння поверхонь, що обмежують Ω, містять суму $x^2+y^2+z^2$, оскільки ця сума в сферичних координатах має досить простий вигляд:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=\rho^2}.$$

Поверхня $\rho = const$ - сфера з центром в початку координат.

Зауваження 3. На практиці, як правило, перехід від області Ω до області Ω^* не здійснюють, а суміщають декартову і сферичну системи координат і розставляють межі інтегрування в повторному інтегралі правої частини формули (5), користуючись геометричним змістом сферичних координат.

Приклад 1. Обчислити M_{xy} однорідного тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=z^2,\ z=1.$

Приклад 2. Знайти масу кулі $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$, якщо густина в кожній точці кулі обернено пропорційна відстані від неї до початку координат. Знайти координати центра мас кулі.