Лекція №5

Тема 3. Криволінійні інтеграли.

п. 3.1. Задача, яка приводить до поняття криволінійного інтеграла першого роду. Задача про масу матеріальної дуги.

Нехай на площині OXY задано криву AB, вздовж якої розподілено масу з густиною $\mu = \mu(x,\ y)$. Таку криву називають матеріальною кривою. Знайдемо масу m такої кривої. Розіб'ємо криву AB довільними точками $C_i,\ i = 1,...,n$ на n елементарних дуг $C_{i-1}C_i$, довжини яких позначимо через Δl_i. В кожній з цих дуг навмання виберемо точку $M_i(x_i,\ y_i)$. Знайдемо масу Δm_i елементарної дуги $C_{i-1}C_i$, вважаючи, що вона однорідна і густина в кожній її точці дорівнює $\mu(M_i) = \mu(x_i,\ y_i)$.

Тоді : $\Delta m_i \approx \mu(M_i)\cdot \Delta l_i$, $\quad m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\cdot \Delta l_i$.

Нехай $\lambda = \max \Delta l_i$, $i = 1,...,n$. Тоді точне значення маси одержимо як границю цієї суми при умові, що $n \to \infty$ і $\lambda \to 0$. Тобто:

$$\boxed{m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\cdot \Delta l_i} \qquad \textbf{(1)}$$

п. 3.2. Означення криволінійного інтеграла першого роду.

Узагальненням поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива, є криволінійні інтеграли. Розрізняють два види криволінійних інтегралів: криволінійні інтеграли першого роду і криволінійні інтеграли другого роду.

Нехай на площині OXY задано криву AB, вздовж якої визначено функцію $f(x,\ y)$. Розіб'ємо криву AB довільними точками C_i, $i = 1,...,n$ на n елементарних дуг $C_{i-1}C_i$, довжини яких позначимо через Δl_i. В кожній з цих дуг навмання виберемо точку $M_i(x_i,\ y_i)$. Розглянемо добутки $f(M_i)\cdot \Delta l_i = f(x_i,\ y_i)\cdot \Delta l_i$.

Складемо суму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta l_i$, яку називають інтегральною сумою функції $f(x,y)$ по кривій AB.

Нехай $\lambda = \max_i \Delta l_i$, $i = 1,...,n$.

Озн. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що $\lambda \to 0$, і ця границя не залежить ні від способу розбиття кривої AB на частини, ні від вибору точок M_i, то її називають *криволінійним інтегралом першого роду (або криволінійним інтегралом по довжині дуги) від функції* $f(x,y)$ *по кривій* AB і позначають: $\int_{AB} f(x,\ y)dl$.

При цьому функція $f(x,y)$ називається *інтегрованою на кривій* AB.

Крива AB називається контуром інтегрування,

dl - диференціалом довжини дуги.

Отже:

$$\boxed{\int_{AB} f(x,\ y)dl = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta l_i} \qquad \textbf{(2)}$$

Теорема 1 (достатня умова інтегрованості функції). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна, а крива AB гладка (в кожній точці $(x, y)\in L$ існує дотична і її положення неперервно змінюється при переміщенні точки по кривій), то інтеграл в формулі (2) існує.

Зауваження 1. Порівнюючи формули (1) і (2) матимемо:

$$\boxed{m=\int\limits_{AB}\mu(x, y)dl}$$ **(3)** – маса матеріальної кривої.

Формула (3) виражає механічний зміст криволінійного інтеграла першого роду.

Зауваження 2. Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтеграла по просторовій кривій.

п. 3.3. Властивості криволінійного інтеграла першого роду.

1. $\int\limits_{AB} f(x, y)dl=\int\limits_{BA} f(x, y)dl$, тобто криволінійний інтеграл не залежить від напряму шляху інтегрування.

2. $\int\limits_{AB} C\cdot f(x, y)dl=C\cdot\int\limits_{AB} f(x, y)dl,\ \ C=const$.

3. $\int\limits_{AB} (f(x, y)+g(x, y))dl=\int\limits_{AB} f(x, y)dl+\int\limits_{AB} g(x, y)dl$.

4. $\int\limits_{L} f(x, y)dl=\int\limits_{L_1} f(x, y)dl+\int\limits_{L_2} f(x, y)dl$, якщо шлях інтегрування L розбито на частини L_1 і L_2 такі, що $L=L_1\cup L_2$ і мають лише одну спільну точку.

5. Якщо $f(x, y)\geq 0$ в усіх точках кривої AB, то $\int\limits_{AB} f(x, y)dl\geq 0$.

6. Якщо $f(x, y)\geq g(x, y)$ в усіх точках кривої AB, то $\int\limits_{AB} f(x, y)dl\geq\int\limits_{AB} g(x, y)dl$.

7. $\int\limits_{AB} dl=l$ - довжина кривої AB.

п. 3.4. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

1. Параметричне представлення кривої інтегрування.

Нехай крива AB задана рівняннями: $x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\leq t\leq\beta$. Вважатимемо, що функції $x=x(t),\ y=y(t)$ разом із похідними $x'(t),\ y'(t)$ - неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Тоді має місце формула:

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x, y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\cdot\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt} \quad \textbf{(4)}$$

Аналогічна формула має місце для криволінійного інтеграла від функції $f(x, y, z)$по просторовій кривій AB, що задається рівняннями: $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ \alpha\leq t\leq\beta$:

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\cdot\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt} \quad \textbf{(5)}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{L}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L - дуга кривої: $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\leq t\leq 2\pi$.

2. Явне представлення кривої інтегрування.

Нехай крива AB задана рівнянням $y=\varphi(x),\ \ a\leq x\leq b$, де $\varphi(x)$ і $\varphi'(x)$ - неперервні на відрізку $[a, b]$. Тоді має місце формула:

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x,\ y)dl = \int\limits_a^b f(x,\ \varphi(x))\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx} \quad \textbf{(6)}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB}(x-y)\,dl$, де AB - відрізок прямої $y=\frac{3}{4}x$ від точки $A(0,\ 0)$ до точки $B(3,\ 4)$.

3. Полярне представлення кривої інтегрування.

Нехай крива AB задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi),\ \ \alpha\le\varphi\le\beta$ в полярних координатах і $\rho(\varphi)$ і $\rho'(\varphi)$ - неперервні на відрізку $[\alpha,\ \beta]$. Тоді має місце формула:

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x,\ y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\cdot\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi} \quad (7)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - пелюстка лемніскати $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$, що розташована в першому координатному куті.

п. 3.5. Застосування криволінійного інтеграла першого роду

в геометрії:

1. $\boxed{\int\limits_{AB} dl = l}$ - довжина кривої AB.

2. $\boxed{\int\limits_{AB} f(x,\ y)dl = Q}$ - площа циліндричної поверхні, напрямна якої лежить в площині XOY, твірна паралельна Oz і сама поверхня задається функцією $z=f(x,y)$.

в механіці:

1. $\boxed{m=\int\limits_{AB}\mu(x,\ y)dl}$ - маса матеріальної дуги AB з густиною $\mu(x,\ y)$.

2. Координати центра мас матеріальної дуги AB з густиною $\mu(x,\ y)$.

$\boxed{x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int\limits_{AB} x\mu(x,y)dl}{\int\limits_{AB}\mu(x,y)dl}}$ - абсциса центра мас;

$\boxed{y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int\limits_{AB} y\mu(x,y)dl}{\int\limits_{AB}\mu(x,y)dl}}$ - ордината центра мас.

3. Моменти інерції матеріальної дуги AB з густиною $\mu(x,\ y)$:

$\boxed{I_x=\int\limits_{AB} y^2\mu(x,\ y)dl}$ - момент інерції відносно осі Ox;

$\boxed{I_y=\int\limits_{AB} x^2\mu(x,\ y)dl}$ - момент інерції відносно осі Oy;

$\boxed{I_O=\int\limits_{AB}(x^2+y^2)\mu(x,\ y)dl}$ - момент інерції відносно початку координат.

Приклад 2. Знайти центр мас верхнього однорідного півкола $x^2+y^2=R^2$.