Лекція №6

п. 3.6. Означення криволінійного інтеграла другого роду.

Нехай на площині OXY задано криву AB, вздовж якої визначено функцію $f(x, y)$. Розіб'ємо криву AB довільними точками C_i, $i=1,...,n$ на n елементарних дуг $C_{i-1}C_i$, довжини яких позначимо через Δl_i. В кожній з цих дуг навмання виберемо точку $M_i(x_i, y_i)$. Розглянемо добутки $f(M_i)\cdot\Delta x_i = f(x_i, y_i)\cdot\Delta x_i$, де Δx_i - проекція вектора $\overline{C_{i-1}C_i}$ на вісь Ox.

Складемо суму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta x_i$, яку називають інтегральною сумою функції $f(x,y)$ по кривій AB по координаті x.

Нехай $\lambda = \max_i \Delta l_i$, $i=1,...,n$.

Озн. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що $\lambda \to 0$, і ця границя не залежить ні від способу розбиття кривої AB на частини, ні від вибору точок M_i, то її називають *криволінійним інтегралом другого роду (або криволінійним інтегралом по координаті x) від функції $f(x,y)$ по кривій AB* і позначають: $\int_{AB} f(x, y)dx$.

Отже:
$$\boxed{\int_{AB} f(x, y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta x_i} \qquad \textbf{(1)}$$

Теорема 1 (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна, а крива AB гладка, то інтеграл в формулі (1) існує.

Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтеграла від функції $f(x, y)$ по координаті y:
$$\boxed{\int_{AB} f(x, y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta y_i} \qquad \textbf{(2)}$$

де Δy_i - проекція вектора $\overline{C_{i-1}C_i}$ на вісь Oy.

Нехай на гладкій кривій AB визначено неперервні функції $P(x, y)$ *і* $Q(x, y)$.

Суму $\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy$ називають криволінійним інтегралом загального вигляду і позначають:
$$\boxed{\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy}.$$

Зауваження 1. Криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла. На відміну від криволінійного інтеграла першого роду криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму шляху інтегрування і при зміні цього напряму змінює свій знак:
$$\boxed{\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{AB} Pdx + Qdy}$$

Зауваження 2. Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по замкненому контуру, тобто контуру інтегрування, в якому початкова та кінцева точки збігаються. Такі інтеграли позначають $\oint_L Pdx + Qdy$. Для замкненого контуру існує два напряму обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контура) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контура).

Твердження. Криволінійний інтеграл по замкненому контуру не залежить від вибору початкової точки, а залежить лише від напряму обходу контура.

п. 3.7. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

1. Параметричне представлення кривої інтегрування.

Нехай крива AB задана рівняннями: $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$. Вважатимемо, що функції $x = x(t),\ y = y(t)$ разом із похідними $x'(t),\ y'(t)$ - неперервні на відрізку $[\alpha,\ \beta]$. Причому точці A кривої відповідає параметр α, а точці B - параметр β.

Тоді має місце формула:

$$\boxed{\int\limits_{AB} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),\ y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),\ y(t)) \cdot y'(t))dt} \qquad \textbf{(3)}$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду можна поширити й на просторові криві. Нехай функції $P(x, y, z),\ Q(x,\ y,\ z),\ R(x, y,\ z)$ визначені і неперервні на просторовій гладкій кривій AB, яку задано рівняннями: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta,$ де функції $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ разом із похідними $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$ - неперервні на відрізку $[\alpha,\ \beta]$. Причому точці A кривої відповідає параметр α, а точці B - параметр β.

$$\int\limits_{AB} P(x,\ y, z)dx + Q(x,\ y,\ z)dy + R(x, y, z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),\ y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),\ y(t),\ z(t)) \cdot y'(t) +$$

$$+ R(x(t),\ y(t), z(t))z'(t))dt\,.$$

Явне представлення кривої інтегрування.

Нехай крива AB задана рівнянням: $y = \varphi(x),\ a \le x \le b$, де $\varphi(x)$ і $\varphi'(x)$ - неперервні на відрізку $[a,\, b]$. Причому точці A кривої відповідає значення a, а точці B - значення b.

Тоді має місце формула:

$$\boxed{\int\limits_{AB} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x,\ \varphi(x) + Q(x,\ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)) \cdot dx} \qquad \textbf{(4)}$$

Зауваження. Криволінійні інтеграли першого і другого роду пов’язані співвідношенням:

$$\boxed{\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl},$$

де α *і* β - кути, які утворені дотичною до кривої AB в точці $M(x,\ y)$ з осями Ox *і* Oy відповідно.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{L} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, де L - ламана OAB, де $O(0,\, 0),\ A(2,\, 0), B(4,\, 2)$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{L} y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$, де L - відрізок прямої у просторі від точки $A(1; 0;\ 2)$ до точки $B(3;\, 1;\ 4)$.

п. 3.8. Механічне застосування криволінійного інтеграла другого роду.
Задача про роботу змінної сили.

Нехай на матеріальну точку $M(x,\, y)$ діє змінна сила $\overline{F} = P(x,\ y) \cdot \overline{i} + Q(x, y) \cdot \overline{j}$, де $P(x, y), Q(x, y)$ - проекції вектора $\overline{F}$ на координатні осі Ox *і* Oy відповідно. І матеріальна точка переміщується під дією цієї сили в площині XOY по деякій кривій AB від т. A до т. B.

Розіб’ємо криву AB довільними точками C_i, $i = 1, \ldots, n$ на n елементарних дуг $C_{i-1}C_i$, довжини яких позначимо через Δl_i. В кожній з цих дуг навмання виберемо точку $M_i(x_i, y_i)$. Замінимо кожну дугу $C_{i-1}C_i$ вектором $\overline{C_{i-1}C_i}(\Delta x_i; \Delta y_i)$, а силу $\overline{F}$ будемо вважати сталою на векторі переміщення $\overline{C_{i-1}C_i}$ і такою, що дорівнює $\overline{F}(M_i)$.

Тоді робота сили $\overline{F}$ вдовж дуги $C_{i-1}C_i$ буде наближено рівна:

$$\Delta A_i \approx \overline{F}(M_i)\cdot \overline{M_{i-1}M_i} = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i .$$

Тоді наближене значення роботи сили на всій кривій:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i)\Delta y_i .$$

Якщо $\lambda = \max\limits_{i} \Delta l_i$, $i = 1,...,n$, то:

$$A = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i)\Delta y_i .$$ Отже:

$$\boxed{A = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy} \quad \textbf{(5)}$$

Зауваження. У випадку просторової кривої матимемо:

$$\boxed{A = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz} \quad \textbf{(6)}$$

Приклад 3. Знайти роботу сили $\overline{F} = 4x^6\overline{i} + xy\overline{j}$ вздовж кривої $y = x^3$ від т. $O(0, 0)$ до т. $B(1, 1)$.

п. 3.9. Формула Гріна.

Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по замкненому контуру L - межі цієї області.

Теорема. Нехай D - деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L, і функції $P(x, y)$ *і* $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *і* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області. Тоді справджується формула Гріна:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy} \quad \textbf{(7)}$$

Тут напрям обходу контура додатний (при обході контура проти годинникової стрілки область D залишається зліва).

Зауваження 1. В процесі доведення цієї формули вважають область D правильною. Можна показати, що формула Гріна залишається справедливою і для довільної області, яку можна розбити на довільне скінченне число правильних областей.

Зауваження 2. З формули Гріна можна дістати формули для обчислення площ плоских фігур:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx}. \quad \textbf{(8)}$$

Дійсно, підставивши у формулу (7) $P = -y,\ Q = 0$, дістанемо $S = -\oint\limits_L ydx$; підставивши у формулу (7) $P = 0, Q = x$, дістанемо: $S = \oint\limits_L xdy$. Додавши отримані рівності, матимемо (8).

Приклад 4. За допомогою формули Гріна обчислити:

$I = \oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y\cdot\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)dy$, якщо L - контур прямокутника з вершинами $A(3;2), B(6;2), C(6;4), D(3;4)$.

Приклад 5. Обчислити роботу сили $\overline{F} = (x - 2y,\ x + y)$ при переміщенні матеріальної точки по колу $x^2 + y^2 = R^2$.