Лекція №7

Тема 4. Поверхневі інтеграли.

п. 4.1. Задача, яка приводить до поняття поверхневого інтеграла першого роду. Задача про масу матеріальної поверхні.

Нехай у просторі $OXYZ$ задано поверхню σ, вздовж якої розподілено масу з густиною $\mu = \mu(x,\ y,\ z)$. Таку поверхню називають матеріальною поверхнею. Знайдемо масу m такої поверхні.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кривими на n елементарних поверхонь σ_i, $i = 1,...,n$, площі яких позначимо через $\Delta\sigma_i$. На кожній з цих поверхонь навмання виберемо точку $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$. Знайдемо масу Δm_i елементарної поверхні σ_i, вважаючи, що вона однорідна і густина в кожній її точці дорівнює $\mu(M_i) = \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)$.

Тоді : $\Delta m_i \approx \mu(M_i)\cdot\Delta\sigma_i$, $\quad m \approx \sum\limits_{i=1}^{n}\mu(M_i)\cdot\Delta\sigma_i$.

Нехай $\lambda = \max\limits_i diam\ \sigma_i$, $i = 1,...,n$. Тоді точне значення маси одержимо як границю цієї суми при умові, що $n \to \infty$ і $\lambda \to 0$. Тобто:

$$\boxed{m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\mu(M_i)\cdot\Delta\sigma_i} \qquad \textbf{(1)}$$

п. 4.2. Означення поверхневого інтеграла першого роду.

Розрізняють два види поверхневих інтегралів: поверхневі інтеграли першого роду і поверхневі інтеграли другого роду.

Нехай у просторі $OXYZ$ задано поверхню σ, вздовж якої визначено функцію $f(x,\ y,\ z)$.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кривими на n елементарних поверхонь σ_i, $i = 1,...,n$, площі яких позначимо через $\Delta\sigma_i$. На кожній з цих поверхонь навмання виберемо точку $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$. Розглянемо добутки $f(M_i)\cdot\Delta\sigma_i = f(x_i,\ y_i,\ z_i)\cdot\Delta\sigma_i$.

Складемо суму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta\sigma_i$, яку називають інтегральною сумою функції $f(x,y,z)$ по поверхні σ.

Нехай $\lambda = \max\limits_i diam\ \sigma_i$, $i = 1,...,n$.

Озн. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що $\lambda \to 0$, і ця границя не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини, ні від вибору точок M_i, то її називають *поверхневим інтегралом першого роду (або поверхневим інтегралом по площі поверхні) від функції* $f(x,y,z)$ по поверхні σ і позначають: $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma$.

При цьому функція $f(x,y,\ z)$ називається *інтегрованою на поверхні* σ.

Отже:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)d\sigma = \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta S_i} \qquad \textbf{(2)}$$

Теорема 1 (достатня умова інтегрованості функції). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна, а поверхня σ гладка (в кожній точці $(x, y, z)\in\sigma$ існує дотична площина і її положення неперервно змінюється при переміщенні точки по поверхні), то інтеграл в формулі (2) існує.

Зауваження. Порівнюючи формули (1) і (2) матимемо:

$$\boxed{m=\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma}$$ **(3)** – маса матеріальної поверхні.

Формула (3) виражає механічний зміст поверхневого інтеграла першого роду.

Поверхневий інтеграл першого роду має такі **властивості**.

1. $\iint\limits_{\sigma} C\cdot f(x, y, z)d\sigma=C\cdot\iint\limits_{\sigma} f(x,y, z)d\sigma,\quad C=const$.

2. $\iint\limits_{\sigma}(f(x, y, z)+g(x,y, z))d\sigma=\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma+\iint\limits_{\sigma} g(x, y, z)d\sigma$.

3. $\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1} f(x,y,z)d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,y,z)d\sigma$, якщо поверхню інтегрування σ розбито на частини σ_1 і σ_2 такі, що $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, а перетин складається лише з межі, що їх розділяє.

4. Якщо $f(x, y,z)\geq 0$ в усіх точках поверхні σ, то $\iint\limits_{\sigma} f(x, y,z)d\sigma\geq 0$.

5. Якщо $f(x, y,z)\geq g(x, y,z)$ в усіх точках поверхні σ, то $\iint\limits_{\sigma} f(x, y,z)d\sigma\geq\iint\limits_{\sigma} g(x,y,z)d\sigma$.

6. $\iint\limits_{\sigma} d\sigma=S$ - площа поверхні σ.

п. 4.3. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції поверхні на відповідну координатну площину.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z=z(x, y)$ і проектується на площину XOY в область D_{xy}. Вважатимемо, що функція $f(x, y, z)$ неперервна на σ, а функції $z(x, y), z'_x(x,y), z'_y(x, y)$ - неперервні в D_{xy}.

Тоді має місце формула:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x,y))\cdot\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy}\qquad \textbf{(4)}$$

Аналогічні формули виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли по її проекціям на площини OXZ *і* OYZ.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $y=y(x, z)$, то:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma=\iint\limits_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz}\qquad \textbf{(5)}$$

Якщо поверхня σ задана рівнянням $x=x(y, z)$, то:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma=\iint\limits_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\cdot\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz}\qquad \textbf{(6)}$$

Приклад 1. Обчислити $I=\iint\limits_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma$, де σ- частина площини $4x+3y+2z-4=0$, що розташована в першому октанті.

Приклад 2. Обчислити $I=\iint\limits_{\sigma} x(y+z)d\sigma$, де σ- частина циліндричної поверхні $x=\sqrt{1-y^2}$, що відтинається площинами $z=0, z=2$.

п. 4.4. Застосування поверхневого інтеграла першого роду

в геометрії:

1. $\boxed{\iint\limits_{\sigma} d\sigma = S}$ - площа поверхні σ.

в механіці:

1. $\boxed{m = \iint\limits_{\sigma} \mu(x,\ y,\ z)d\sigma}$ - маса матеріальної поверхні σ з густиною $\mu(x,\ y,\ z)$.

2. Координати центра мас матеріальної поверхні σ з густиною $\mu(x,\ y,\ z)$.

$\boxed{x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} x\mu(x,y,z)d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} \mu(x,\ y,z)d\sigma}}$ - абсциса центра мас;

$\boxed{y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} y\mu(x,y,z)d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} \mu(x,y,z)d\sigma}}$ - ордината центра мас;

$\boxed{z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} z\mu(x,y,z)d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} \mu(x,y,z)d\sigma}}$ - апліката центра мас.

3. Моменти інерції матеріальної поверхні σ з густиною $\mu(x,\ y,\ z)$.

$\boxed{I_x = \iint\limits_{\sigma} \left(y^2 + z^2\right)\mu(x,y,z)d\sigma}$ - момент інерції відносно осі Ox;

$\boxed{I_y = \iint\limits_{\sigma} \left(z^2 + x^2\right)\mu(x,y,z)d\sigma}$ момент інерції відносно осі Oy;

$\boxed{I_z = \iint\limits_{\sigma} \left(x^2 + y^2\right)\mu(x,y,z)d\sigma}$ - момент інерції відносно осі Oz;

$\boxed{I_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z^2\mu(x,y,z)d\sigma}$ - момент інерції відносно площини XOY;

$\boxed{I_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y^2\mu(x,y,z)d\sigma}$ - момент інерції відносно площини XOZ;

$\boxed{I_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x^2\mu(x,y,z)d\sigma}$ - момент інерції відносно площини YOZ;

$\boxed{I_O = \iint\limits_{\sigma} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mu(x,y,z)d\sigma}$ - момент інерції відносно початку координат.

Приклад 2. Знайти масу півсфери радіуса R, якщо в кожній точці поверхні густина чисельно дорівнює відстані цієї точки до радіуса, перпендикулярного основі півсфери.