Лекція №8

п. 4.6. Означення поверхневого інтеграла другого роду.

Поверхневий інтеграл другого роду будується за зразком криволінійного інтеграла другого роду, де напрямлену криву розкладали на елементарні дуги і проектували на координатні осі; знак обирали в залежності від того, співпав її напрям з напрямом осі чи ні.

Нехай у просторі $OXYZ$ задано двосторонню поверхню σ (такою є площина, еліпсоїд, будь-яка поверхня, що задається рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$, f'_x і f'_y - функції, не перервні в деякій області D площини XOY) . Після обходу цієї поверхні, не перетинаючи її межі, напрям нормалі до неї не змінюється. Кажуть, що двостороння поверхня орієнтовна, якщо на ній обрано певну сторону.

Нехай в точках орієнтовної двосторонньої поверхні σ в просторі $OXYZ$ визначено функцію $f(x, y, z)$.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кривими на n елементарних поверхонь σ_i, $i = 1,...,n$, і проектуємо їх на координатні площини. При цьому площі проекції ΔS_i беремо зі знаком «+», якщо обрано верхню сторону поверхні (нормаль $\overline{n_i}$ до обраної сторони поверхні утворює гострий кут з віссю Oz, тобто $\cos\gamma_i > 0$), і зі знаком «-», якщо обрано нижню сторону поверхні (нормаль $\overline{n_i}$ до обраної сторони поверхні утворює тупий кут з віссю Oz, тобто $\cos\gamma_i < 0$). На кожній з частин σ_i навмання виберемо точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Складемо інтегральну суму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i$, де $\Delta S_i = (\Delta S_i)_{xy}$ - площа проекції σ_i на площину XOY.

Нехай $\lambda = \max_i diam\, \sigma_i$, $i = 1,...,n$.

Озн. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що $\lambda \to 0$, і ця границя не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини, ні від вибору точок M_i, то її називають *поверхневим інтегралом другого роду (або поверхневим інтегралом по координатах) від функції* $f(x,y,z)$ по поверхні σ і позначають: $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dxdy$.

При цьому функція $f(x,y,z)$ називається *інтегрованою на поверхні* σ.

Отже:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)dxdy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta S_i} \qquad \textbf{(2)}$$

Теорема 1 (достатня умова інтегрованості функції). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна, а поверхня σ гладка, то інтеграл в формулі (2) існує.

Аналогічно визначаються поверхневі інтеграли другого роду по змінних y і z, z і x:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)dydz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot (\Delta S_i)_{yz}} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)dxdz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot (\Delta S_i)_{xz}} \qquad \textbf{(4)}$$

Тут $(\Delta S_i)_{yz}$, $(\Delta S_i)_{xz}$ - площі проекції σ_i відповідно на площину YOZ і XOZ.

Загальним видом поверхневого інтеграла другого роду є інтеграл:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} P(x,\ y,\ z)dydz + Q(x,\ y,z)dxdz + R(x,y,\ z)dxdy = \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy}$$

де $P,\ Q,\ R$ - неперервні функції, визначені в точках двосторонньої поверхні σ.

Зауваження. З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що цей інтеграл змінює знак при зміні сторони поверхні.

п. 4.7. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції поверхні на відповідну координатну площину.

Нехай функція $R(x,\ y,\ z)$ неперервна в усіх точках поверхні σ задана рівнянням $z = z(x,\ y)$ і проектується на площину XOY в область D_{xy}. Вважатимемо, що функція $z(x,\ y)$ - неперервна в D_{xy}.

Тоді має місце формула:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} R(x,\ y,\ z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,\ y,\ z(x,y))dxdy} \qquad \textbf{(5)}$$

Аналогічні формули виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли по її проекціям на площини OXZ *і* OYZ.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $y = y(x,\ z)$, то:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)dxdz = \pm\iint\limits_{D_{xz}} f(x,\ y(x,\ z),\ z)dxdz} \qquad \textbf{(5)}$$

Якщо поверхня σ задана рівнянням $x = x(y,\ z)$, то:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,\ z),\ y,\ z)dydz} \qquad \textbf{(6)}$$

Знаки перед інтегралами обираються в залежності від орієнтації поверхні σ: беремо знак «+», якщо обрано верхню сторону поверхні; знак «-», якщо обрано нижню сторону поверхні.

Для обчислення поверхневого інтеграла другого роду загального вигляду використовують формули (4-6), проектуючи σ на всі три координатні площини:

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint\limits_{\sigma} P(x,\ y,\ z)dydz + Q(x,\ y,z)dxdz + R(x,\ y,z)dxdy = \\ &= \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy\end{aligned}} \qquad \textbf{(7)}$$

Зауваження. Можна показати справедливість рівностей:

$$dxdy = \cos\gamma\cdot d\sigma,\ dxdz = \cos\beta\cdot d\sigma,\ dydz = \cos\alpha\cdot d\sigma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора нормалі $\bar{n}$ до обраної сторони поверхні σ.

З цього випливає зв'язок між поверхневими інтегралами першого і другого роду:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma} \qquad \textbf{(8)}$$

Приклад 1. Обчислити $I = \iint\limits_{\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy$, де σ - верхня частина площини $2x - 3y + z = 6$, що розташована в четвертому октанті.

Приклад 2. Обчислити $I = \iint\limits_{\sigma} zdxdy$, де σ - зовнішній бік сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

п. 4.8. Формула Остроградського-Гаусса.

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Ця формула є просторовим аналогом формули Гріна.

Теорема. Якщо функції $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій обмеженій області Ω, то має місце формула:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oint\!\!\!\oint\limits_{\sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy} \qquad \textbf{(9)}$$

де σ - межа області Ω і інтегрування по σ здійснюється по зовнішній стороні.

Приклад. Обчислити $I=\oint\!\!\!\oint\limits_{\sigma} x^2dydz+3ydxdz-2xzdxdy$, де σ - зовнішня сторона піраміди, що обмежена площинами: $x=0,\ y=0,\ \ z=0,\ x+y+z-1=0$.

п. 4.9. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами другого роду.

Теорема. Якщо функції $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в точках орієнтованої поверхні σ, то має місце формула:

$$\boxed{\oint\limits_{L} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}, \qquad \textbf{(10)}$$

де L - межа поверхні σ і інтегрування вздовж кривої L здійснюється в додатному напрямі (тобто при обході межі L поверхня σ має залишатися весь час зліва).

Зауваження. Використовуючи формулу (8) матимемо формулу Стокса у вигляді:

$$\boxed{\oint\limits_{L} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\sigma}(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma)d\sigma} \qquad \textbf{(11)}$$

Запам'ятати цю формулу легко у такому символічному вигляді:

$$\boxed{\oint\limits_{L} Pdx+Qdy+Rdz=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}} \qquad \textbf{(12)}$$

Тут $\bar{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - одинична нормаль до тієї сторони поверхні σ, знаходячись на якій спостерігач, що рухається в напрямі, обраному на L буде бачити σ зліва.

Приклад. Обчислити за формулою Стокса інтеграл: $I=\oint\limits_{L} x^2y^3dx+dy+zdz$, де L - коло $x^2+y^2=1,\ z=0$ і обхід контуру L здійснюється в додатному напрямі.

Тема 5. Елементи теорії поля.

п. 5.1. Основні поняття.

Озн. *Полем* називається область простору, в кожній точці якого визначено значення деякої величини.

Озн. Якщо кожній т. M цієї області відповідає певне число $U=U(M)$, то кажуть, що в області задано *скалярне поле.*

Озн. Якщо кожній т. M цієї області відповідає певне вектор $\bar{a}=\bar{a}(M)$, то кажуть, що в області задано *векторне поле.*

Прикладами скалярних полів є поле температури, атмосферного тиску, густини розподілу масу, тощо. Прикладами векторних полів є силові поля, поле швидкостей рідини, що тече, магнітне поле, тощо.

Якщо функції $U=U(M)$ ($\bar{a}=\bar{a}(M)$) не залежать від часу, то скалярне (векторне поле) називається стаціонарним. Далі будемо розглядати лише стаціонарні поля.

Якщо $U=U(x,y,z)$, то скалярне поле називається просторовим, а, якщо $U=U(x,y)$, то – плоским.

Вектор $\bar{a}=\bar{a}(M)$, що визначає векторне поле, можна розглядати як векторну функцію трьох скалярних аргументів: $\bar{a}=\bar{a}(x,y,z)$ або:

$$\boxed{\bar{a}=P(x,\ y,\ z)\cdot\bar{i}+Q(x,\ y,z)\cdot\bar{j}+R(x,\ y,\ z)\cdot\bar{k}},$$

де P,Q,R - проекції $\bar{a}$ на осі координат. Надалі будемо вважати, що P,Q,R - неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку.

Нехай скалярне поле визначено функцією U.

Тоді $U(x,y,z)=C$ - рівняння поверхонь рівня (у випадку просторового скалярного поля) і $U(x,y)=C$ - рівняння ліній рівня (у випадку плоского скалярного поля), $C=const$.

Нехай функція U - диференційовна. Тоді похідна скалярного поля U за напрямом вектора $\bar{l}$ обчислюється за формулою:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\cos\gamma},$$

де $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Градієнт скалярного поля $gradU$ – це вектор,який вказує напрям, в якому похідна за напрямом $\frac{\partial U}{\partial l}$ має найбільше значення. Має місце формула:

$$\boxed{gradU=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\bar{k}}.$$

Приклад. Знайти похідну за напрямом $\frac{\partial U}{\partial l}$ скалярного поля $U=x^2+y^2-4yz$ в т. $M(0;1;2)$ за напрямом $\overline{MM_1}$, де т. $M_1(2;3;3)$. Знайти градієнт U в т. M.