Лекція №9

п. 5.2. Потік векторного поля.

Нехай векторне поле утворене вектором:

$$\boxed{\bar{a} = P(x, y, z)\cdot \bar{i} + Q(x, y, z)\cdot \bar{j} + R(x, y, z)\cdot \bar{k}}.$$

Будемо вважати, що $\bar{a}(M)$ - вектор швидкостей потоку рідини, σ - деяка поверхня, що знаходиться в цьому потоці і пропускає рідину. Оберемо певну сторону поверхні σ. Нехай $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - одиничний вектор нормалі до обраної сторони поверхні.

Озн. *Потоком вектора* $\bar{a}$ *через поверхню* σ називається скалярна величина K, що дорівнює інтегралу по поверхні σ від скалярного добутку $\bar{a}$ на одиничний вектор нормалі $\bar{n}$ до обраної сторони поверхні.

$$\boxed{K = \iint_{\sigma} \bar{a}\cdot\bar{n}\, d\sigma} \qquad (1)$$

або $$\boxed{K = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma} \qquad (2)$$

або $$\boxed{K = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy} \qquad (3)$$

Фізичний зміст потоку – кількість рідини, яка протікає через σ за одиницю часу.

Нехай σ - замкнена поверхня. В цьому випадку

$$K = \oiint_{\sigma} \bar{a}\cdot\bar{n}\, d\sigma$$

і за напрям $\bar{n}$ звичайно беруть напрям зовнішньої нормалі і кажуть про потік ззовні σ.

Тоді K - різниця між кількістю рідини, що витікає із σ і кількістю рідини, що втікає в неї. Якщо $K > 0$, то всередині σ є джерела рідини, якщо $K < 0$, то всередині σ є стоки рідини. Якщо $K = 0$, то всередині σ немає ні джерел ні стоків, або їх дії взаємно компенсуються.

Приклад. Знайти потік вектора $\bar{a} = z\cdot\bar{i} - x\cdot\bar{j} + y\cdot\bar{k}$ через верхню сторону трикутника, отриманого перетином площини $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ з координатними площинами.

п. 5.3. Дивергенція векторного поля. Формула Остроградського-Гаусса у векторній формі.

Озн. *Дивергенцією векторного поля* $\bar{a} = P(x, y, z)\cdot\bar{i} + Q(x, y, z)\cdot\bar{j} + R(x, y, z)\cdot\bar{k}$ в т. M називається скалярна величина $div\,\bar{a}(M)$, яка обчислюється за формулою:

$$\boxed{div\,\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_M + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_M + \frac{\partial R}{\partial z}\Big|_M} \qquad (4)$$

Як відомо, формула Остроградського – Гаусса має вигляд:

$$\oiint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Використовуючи поняття потоку і дивергенції, можна записати формулу Острградського – Гаусса у векторній формі:

$$\boxed{K = \iiint_{\Omega} div\,\bar{a}\, dxdydz} \qquad (5)$$

З формули (5) слідує, що потік векторного поля через замкнену поверхню σ в напрямі зовнішньої нормалі дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції цього поля по області Ω, що обмежена σ.

Фізичний зміст дивергенції полягає в наступному:
якщо $div\,\overline{a}(M)>0$, то точка M - джерело рідини;
якщо $div\,\overline{a}(M)<0$, то точка M - стік рідини.

Величина $div\,\overline{a}(M)$ характеризує інтенсивність джерела або стоку рідини.

Приклад. Знайти $div\,\overline{a}(M)$, якщо $\overline{a}=xy\cdot\overline{i}+yz\cdot\overline{j}+xz\cdot\overline{k}$. Обчислити $div\,\overline{a}\big|_M$, де т. $M(3;2;0)$.

п. 5.4. Циркуляція векторного поля.

Нехай L - замкнена крива в векторному полі $\overline{a}=P(x,y,z)\cdot\overline{i}+Q(x,y,z)\cdot\overline{j}+R(x,y,z)\cdot\overline{k}$ з обраним напрямом.

Озн. *Циркуляцією векторного поля* $\overline{a}(M)$ називається скалярна величина

$$\boxed{C=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz}. \qquad (6)$$

Зауваження. Якщо крива L розташована у силовому полі, то циркуляція – це робота сили $\overline{a}(M)$ при переміщенні матеріальної точки вздовж L.

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{a}=(x-2z)\cdot\overline{i}+(x+3y+z)\cdot\overline{j}+(5x+y)\cdot\overline{k}$ вдовж периметра трикутника з вершинами в точках $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ по контуру $ABCA$.

п. 5.5. Ротор векторного поля. Формула Стокса в векторній формі.

Озн. *Ротором векторного поля* $\overline{a}=P(x,y,z)\cdot\overline{i}+Q(x,y,z)\cdot\overline{j}+R(x,y,z)\cdot\overline{k}$ називається вектор $rot\,\overline{a}(M)$, що визначається формулою:

$$\boxed{rot\,\overline{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\overline{k}} \qquad (7)$$

Формулу (7) можна записати в символічному вигляді:

$$\boxed{rot\,\overline{a}(M)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}} \qquad (8)$$

Як відомо, формула Стокса має вигляд:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_\sigma \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\cos\gamma\right)d\sigma .$$

Використовуючи поняття циркуляції та ротору, можна записати формулу Стокса в векторній формі:

$$\boxed{C=\iint\limits_\sigma rot\,\overline{a}\cdot\overline{n}\;d\sigma} \qquad (9).$$

З формули (9) слідує, що циркуляція векторного поля $\overline{a}$ вдовж замкненого контуру L дорівнює потоку ротора цього вектора $\overline{a}$ через поверхню σ, що лежить в векторному полі $\overline{a}$ і обмежена контуром L.

В формулі (9) напрям на контурі L і сторона поверхні σ узгоджені так, як в формулі Стокса.

п. 5.6. Векторні диференціальні операції. Оператори Гамільтона і Лапласа.

Дії знаходження градієнта, дивергенції і ротора називаються векторними диференціальними операціями першого порядку (в них входять тільки перші похідні).

Ці операції зручно записувати за допомогою диференціального оператора Гамільтона:

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot \bar{k}} \qquad (10)$$

Цей оператор набуває певний зміст лише в комбінації із скалярними або векторними функціями. При цьому множення вектора ∇ на U або $\bar{a}$ здійснюються за правилами векторної алгебри, а множення символів $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ на функції U, P, Q, R розуміють як взяття відповідних частинних похідних. Наприклад:

1) $\nabla \cdot U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}$, тому: $\boxed{\nabla U = gradU}$;

2) $\nabla \cdot \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot \left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, тому: $\boxed{\nabla \bar{a} = div\bar{a}}$;

3) $\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\bar{a}$, тому: $\boxed{\nabla \times \bar{a} = rot\bar{a}}$.

Після застосування ∇ до скалярного або векторного поля отримують нове поле, до якого можна знову застосувати цей оператор. В результаті отримують диференціальні операції другого порядку. Наприклад:

4) $divgradU = \nabla(\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla)\cdot U = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\cdot U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

Введемо позначення: $\boxed{\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$ - оператор Лапласа.

$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0}$ або $\boxed{\Delta U = 0}$ - рівняння Лапласа.

п. 5.7. Соленоїдальне поле.

Озн. Векторне поле $\bar{a}$ називається *соленоїдальним*, якщо в усіх його точках дивергенція дорівнює нулю, тобто $\boxed{div\ \bar{a} = 0}$.

Прикладами соленоїдальних полів є: поле лінійних швидкостей твердого тіла, що обертається; магнітне поле, що створюється прямолінійним провідником, вздовж якого тече електричний струм; тощо.

Властивості соленоїдальних полів.

1. З формули Остроградського-Гаусса слідує, що в соленоїдальному полі $\bar{a}$ потік вектора через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Отже, соленоїдальне поле не має ні джерел ні стоків.

2. Якщо $div\ \bar{a} = 0$, то існує таке поле $\bar{b}$, що $\bar{a} = rot\bar{b}$. Вектор $\bar{b}$ називається векторним потенціалом $\bar{a}$.

п. 5.8. Потенціальне поле.

Озн. Векторне поле $\bar{a}$ називається *потенціальним* (безвихровим), якщо в усіх точках поля $\boxed{rot\ \bar{a} = 0}$.

Прикладами потенціальних полів є поле сили тяжіння, поле реакцій пружного зв'язку та ін.

Властивості потенціальних полів.

1. Циркуляція потенціального поля $\overline{a}$ по будь-якому замкненому контуру в цьому полі дорівнює нулю.

Для силового потенціального поля це означає, що робота сили по будь-якому замкненому контуру дорівнює нулю.

2. В потенціальному полі $\overline{a}$ інтеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ вздовж довільної кривої L не залежить від шляху інтегрування.

3. Вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції U, тобто: $Pdx + Qdy + Rdz = dU$. При цьому функція U називається потенціалом векторного поля $\overline{a}$.

Зауваження. Оскільки для потенціального поля:
$\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k} = grad\,U$, то вектор $\overline{a}$ є градієнтом скалярного поля U.

Приклад. Встановити потенціальність поля $\overline{a} = (yz - 2x)\overline{i} + (xz - 2y)\overline{j} + xy\overline{k}$ і знайти його потенціал.

п. 5.9. Гармонічне поле.

Озн. Векторне поле $\overline{a}$ називається *гармонічним*, якщо воно одночасно є і потенціальним і соленоїдальним, тобто: $\boxed{rot\,\overline{a} = 0 \quad i \quad div\,\overline{a} = 0}$.

Оскільки в гармонічному полі $rot\,\overline{a} = 0$, то $\overline{a} = grad\,U$. Оскільки $div\,\overline{a} = 0$, то $div\,grad\,U = 0$, тобто $\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0}$ - рівняння Лапласа.

Тобто функція U є розв'язком рівняння Лапласа. Така функція називається *гармонічною*.