Лекція №1

Змістовий модуль 1. Диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних.

Тема 1. Диференціальне числення функції однієї змінної.

п. 1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної.

1. Задача про швидкість прямолінійного руху.

Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно і прямолінійно вздовж деякої прямої і за час t проходить відстань S.

$S = S(t)$ - відстань рухомої т. M.

Знайти швидкість руху т. M.

$\Delta t > 0$ - приріст часу, ΔS - приріст шляху,

$S(t+\Delta t)$ - шлях, що пройшла точка за час $t+\Delta t$.

$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$.

$v_c = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$ - середня швидкість руху точки за час $t+\Delta t$.

Тоді $\boxed{v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}}$ (1) – швидкість руху точки в момент часу t.

2. Задача про дотичну до кривої.

Нехай L -деяка крива.

Пряму MM_1 називають січною.

Нехай т. M_1, рухаючись вздовж кривої, наближається до т. M.

Тоді січна MM_1 повертається навколо т. M, а $|MM_1| \to 0$.

Озн. Пряму MT , яка є граничним положенням січної MM_1 , називають *дотичною до кривої* L в т. M.

Нехай в прямокутній системі координат крива L задана рівнянням $y = f(x)$ і має в т. $M(x, y)$ невертикальну дотичну. Розглянемо задачу знаходження кутового коефіцієнта k цієї дотичної.

$$tg\varphi = \frac{AM_1}{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

$\boxed{k = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\phi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$ (2) – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої L в т. M.

п. 1.2. Означення похідної.

Механічний та геометричний зміст похідної.

Нехай на деякому проміжку $(a;\ b)$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in (a;b)$ і надамо x довільного приросту Δx , такого, щоб точка $x+\Delta x$ також належала проміжку $(a;\ b)$. Тоді $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ - приріст функції в точці x .

Озн. *Похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x позначається одним з таких символів:

$$y'; \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df}{dx}; \quad f'(x).$$

Отже, за означенням

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \quad (3)$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = x^2$: 1) в довільній точці x; 2) в точці $x = 5$.

1) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

2) $y'(5) = 2x\big|_{x=5} = 10$.

З геометричної точки зору похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою $x = x_0$, тобто $f'(x_0) = k$.

З погляду фізики похідна має таке тлумачення – це швидкість руху матеріальної точки $v = S'(t)$, де S - шлях, t - час.

Озн. Операція знаходження похідної функції називається її *диференціюванням*.

п. 1.3. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

Нехай L -деяка крива, яка задана рівнянням $y = f(x)$.

$k = tg\alpha = f'(x_0)$ - кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$.

Знайдемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$.

Як відомо, рівняння прямої, що проходить через т. $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k має вигляд: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Тоді:

$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$ (4) - рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо $f'(x_0) = \infty$, то дотична паралельна Oy, а її рівняння: $x = x_0$.

Озн. Нормаллю до кривої називається пряма, яка проходить через точку дотику, перпендикулярно дотичній.

$\boxed{y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)}$ (5) – рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$.

Приклад 2. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3$ в т. $M_0(2;8)$.

п. 1.4. Односторонні похідні. Неперервність і диференційованість.

Нехай $f(x)$ визначена в околі т. x. Тоді:

$\boxed{f'_+(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to +0 \\ (\Delta x > 0)}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$ - права похідна від функції $f(x)$ в т. *x*.

$\boxed{f'_-(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to -0 \\ (\Delta x < 0)}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$ - ліва похідна від функції $f(x)$ в т. *x*.

Якщо $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$, то під похідною в т. a розуміють праву похідну, а в т. b - ліву похідну.

Якщо в т. x ліва і права похідні рівні, то:

$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$ - похідна в т. x.

Якщо $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, то $f'(x)$ в т. x не існує.

Озн 1. Функція $f(x)$ називається *диференційовною в* т. x, якщо в цій точці вона має скінченну похідну $f'(x)$.

Озн 2. Функція $f(x)$ називається *диференційовною на проміжку*, якщо вона диференційовна в кожній точці цього проміжку.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ - диференційовна в т. x, то вона в цій точці неперервна.

п. 1.5. Диференціювання функцій

Основні правила диференціювання. Вважаємо, що C - стала величина, а $u = u(x)$, $v = v(x)$ - деякі диференційовні функції від x.

1. $C' = 0$.

2. $(u + v)' = u' + v'$.

3. $(uv)' = u'v + v'u$.

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Твердження 1. Якщо $x = g(y)$ - обернена функція до функції $y = f(x)$ і $f(x)$ має скінченну похідну в точці x_0 ($f'(x_0) \neq 0$), тоді $g(y)$ в точці $y_0 = f(x_0)$ має похідну $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Таблиця похідних.

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in R$.

2. $(a^x)' = a^x \ln a$.
$(e^x)' = e^x$.

3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

12. $(shx)' = chx$.

13. $(chx)' = shx$.

14. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$.

15. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

Зокрема: 1) $y = x$, $y' = 1$; 2) $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Наведемо доведення деяких формул з таблиці.

1. Похідна показникової функції $y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1,\ -\infty < x < +\infty)$.

Маємо $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$. Тоді $y' = \left(a^x\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{a^x \Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$.

2. Похідна функції $y = \sin x$.

Маємо $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x + \dfrac{\Delta x}{2})$.

Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x + \dfrac{\Delta x}{2})$. Тоді $y' = (\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$.

Зауваження. Остання формула має місце у випадку, коли кут x вимірюється у радіанах. Якщо x вимірюється у градусах, то $(\sin x)' = \dfrac{x}{180} \cdot \cos x$.

Для знаходження похідних обернених тригонометричних функцій використовується твердження 1.

3. Похідна функції $y = \arcsin x\ (-1 \le x \le 1,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2)$.

Функція $y = \arcsin x$ є функцією оберненою до функції $x = \sin y$. Тоді $x'_y = \cos y$ і $y'_x = (\arcsin\ x)' = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (-1 < x < 1)$. При цьому рівність $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ випливає з обмежень $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

4. Похідна функції $y = \arccos x$ знаходиться аналогічно. При цьому

$y' = (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (-1 < x < 1)$.

5. Похідна функції $y = arctgx\ (-\infty \le x \le +\infty)$.

Функція $y = arctgx$ є функцією оберненою до функції $x = tgy$. Тоді $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ і

$y'_x = (arctgx)' = \dfrac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1 + tg^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Похідна складеної функції.

Нехай $y = f(x)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f(\varphi(x))$ - складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим x.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x і справедлива формула

$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$ (6) – формула похідної складеної функції.

Згідно з формулою (2) маємо таке правило диференціювання складеної функції: похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по кінцевому аргументу. Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin^3 x$.

Тут проміжний аргумент $u = \sin x$ і $y = u^3$. Тоді:

$y' = y'_u \cdot u'_x = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.