Лекція №2

п. 1.6. Похідна параметрично заданої функції.

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично:

$$x = \varphi(t),\;\; y = \phi(t),\;\; \alpha \le t \le \beta.$$

Припустимо, що функція $\varphi(t)$ строго монотонна на інтервалі $(\alpha; \beta)$ і має відмінну від нуля похідну в довільній точці цього інтервалу, а функція $\phi(t)$ на цьому самому інтервалі має похідну $\phi'(t)$. Тоді існує обернена функція $t = \Phi(x)$, яка має похідну і яку знаходять за формулою: $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ або $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$. Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \phi(t) = \phi(\Phi(x))$ з проміжним аргументом $t = \Phi(x)$, тому за формулою похідної складеної функції матимемо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \phi'(t) \cdot \Phi'(x) = \dfrac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Отже, похідну функції, заданої параметрично, знаходять за формулою:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}}$$ (7) – похідна функції, заданої параметрично.

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної до циклоїди: $x = t - \sin t;\;\; y = 1 - \cos t$ в точці, що відповідає $t = \dfrac{\pi}{2}$.

п. 1.7. Диференціювання неявно заданої функції.

Нехай неявна функція $y = f(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад 2. Знайти y', якщо $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.

п. 1.8. Логарифмічне диференціювання. Похідна показникові-степеневої функції.

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Існують функції, похідні яких знаходять лише логарифмічним диференціюванням. Прикладом такої функції є показниково-степенева функція $y = u(x)^{v(x)}$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - відомі диференційовані функції від x. Знайдемо похідну такої функції.

$$\ln y = \ln u^v,\;\; \ln y = v \ln u,\;\; (\ln y)' = (v \ln u)',\;\; \frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u},$$

$$y' = y(v' \ln u + v\frac{u'}{u}),\;\; y' = u^v (v' \ln u + v\frac{u'}{u}).$$

Приклад 3. Знайти y', якщо: 1) $y = x^{\sin x}$, 2) $y = \dfrac{x^3 (x^2 + 1)\, e^x}{(x-1) \cdot \sqrt{3x+5}}$.

п. 1.9. Означення та геометричний зміст диференціала.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в т. x, тобто має в цій точці похідну

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, $\boxed{\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x}$ (*)

Перший доданок лінійний відносно Δx і при $\Delta x \to 0$ та $f'(x) \neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з Δx, тому що:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x).$$

Другий доданок рівності (*) не є лінійним відносно Δx і є нескінченно малою вищого порядку ніж Δx, тому що:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Озн. *Диференціалом* dy *функції* $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту $f(x)$ в цій точці:

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot \Delta x} \quad (8)$$

При цьому $\Delta x = dx$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту Δx.

Тому

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Звідси $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Геометричний зміст диференціала.

Диференціал $f(x)$ при заданих значеннях x і Δx дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x. Приріст функції Δy при цьому дорівнює приросту ординати кривої.

При заміні приросту функції її диференціалом припускається похибка, яка за абсолютною величиною дорівнює довжині відрізка PN. Отже, така заміна доцільна лише для малих значень Δx.

Властивості диференціала.

Нехай $u = u(x), v = v(x)$ - диференційовні.

C – стала. Тоді:

1. $dC = 0$.
2. $d(Cu) = Cdu$.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(uv) = vdu + udv$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}, \; v \neq 0$.

п. 1.10. Застосування диференціала до наближених обчислень.

Як зазначалося в п. 1.9, приріст Δy функції $y = f(x)$ в точці x можна наближено замінити диференціалом dy в цій точці, тобто:

$$\boxed{\Delta y \approx dy}.$$

Підставивши в цю рівність значення Δy і dy, дістанемо:

$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$ або

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ є при $\Delta x \to 0$ нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx, тому що при $f'(x) \neq 0$ величини Δy і dy еквівалентні:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x}{f'(x) \cdot \Delta x} = 1.$$

Приклад 4. Обчислити наближено $arctg\,1{,}05$.