Лекція №3

п. 1.11. Застосування диференціального числення для дослідження функцій.

п.1.11.1. Монотонність функції.

Теорема 1. (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) скрізь, крім, може, скінченного числа точок, в яких $f'(x)=0$ на $(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $(a;b)$.

Озн. Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають *стаціонарними точками* функції. Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* функції.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$ треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та за умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

п. 1.11.2. Локальний екстремум функції.

Озн. Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (або мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ (або $f(x)>f(x_0)$).

Озн. Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються *точками локального екстремуму*, а значення функції в цих точках називаються відповідно *локальним максимумом і локальним мінімумом або локальним екстремумом.*

Теорема 1. (Необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0)=0$.

Умова $f'(x_0)=0$ є необхідною але не є достатньою для того, щоб диференційовна в точці x_0 функція мала локальний екстремум в цій точці.

Теорема 2. (перша достатня умова локального екстремуму). Якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 - точка локального максимуму; якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 - точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.

З теорем 1 і 2 випливає таке правило дослідження функції на екстремум: щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x)=0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує;

2) якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь точці інтервалу;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках.

Теорема 3 (друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 - стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x)=0$, і в околі точки x_0 існує неперервна похідна, причому $f''(x_0)\neq 0$.

Якщо $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка локального максимуму.

п. 1.11.3. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину.

Озн. Крива $y=f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Озн. Крива $y=f(x)$ називається *вгнутою* на інтервалі, якщо всі її точки крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Озн. *Точкою перегину* називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

Теорема 1. Нехай функція $y=f(x)$ є двічі диференційовною на $(a;b)$, тоді:

1) якщо $f''(x_0)<0$, $x\in(a,b)$, то крива $y=f(x)$ опукла на $(a;b)$;
2) якщо $f''(x_0)>0$, $x\in(a,b)$, то крива $y=f(x)$ вгнута на $(a;b)$.

З теореми 1 випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує). Однак точками перегину кривої $y=f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує.

Озн. Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду функції* $f(x)$.

Теорема 2. Нехай x_0 - критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак на протилежний, то точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

Отже, щоб знайти точки перегину кривої, треба знайти критичні точки другого роду і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

п. 1.11.4. Асимптоти кривої.

Озн. Пряма l називається *асимптотою кривої*, якщо відстань δ від змінної точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

З означення асимптоти випливає, що для існування вертикальної асимптоти $x=x_0$ необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Рівняння похилої асимптоти шукають у вигляді

$$\boxed{y=kx+b}.$$

В цьому рівнянні $\boxed{k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$, $\boxed{b=\lim\limits_{x\infty\infty}(f(x)-kx)}$.

Зауваження 1. Якщо хоча б одна з границь для k або b не існує або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має.

Зауваження 2. Асимптоти кривої $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ можуть бути різні. Тому границі для k і b потрібно обчислювати як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$.

п. 1.11.5. Схема дослідження функції та побудова її графіка.

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;
2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції. Враховуючи дослідження, проведені в п.1-7.

Приклад. Дослідити функцію $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ і побудувати її графік.

п. 1.12. Правило Лопіталя.

Розглянемо спосіб розкриття невизначеностей виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ *і* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, який базується на застосуванні похідних.

Теорема 1. (Правило Лопіталя розкриття невизначеності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і диференційовні в околі точки x_0 і обертаються в нуль в цій точці: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Нехай $\varphi'(x_0)\neq 0$ в околі точки x_0. Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$.

Тобто границя відношення двох нескінченно малих дорівнює границі відношення їх похідних, якщо ця границя існує.

Зауваження 1. Теорема1 правильна і у випадку, коли функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ не визначені при $x=x_0$, але $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

Зауваження 2. Теорема 1 справедлива і в тому випадку, коли $x\to\infty$.

Зауваження 3. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють тим самим у мовам, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то терему 1 можна застосувати ще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Теорема 2. (Правило Лопіталя розкриття невизначеності виду $\dfrac{\infty}{\infty}$). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і диференційовні в околі точки x_0 (крім, може самої точки x_0), в цьому околі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$. Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$.