Лекція №4

Тема 2. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

п. 2.1. Означення функції двох змінних.

До цих пір ми займалися вивченням функції однієї змінної, тобто вивченням змінної, значення якої залежали від значення лише однієї незалежної змінної. На практиці часто доводиться мати справу з величинами, числові значення яких залежать від значень кількох величин, що незалежно змінюються.

Нехай D - множина пар дійсних чисел $(x,\ y)$.

Озн. Змінна z називається функцією двох змінних x і y, якщо кожній парі чисел $(x,\ y)\in D$ за певним правилом або законом ставиться у відповідність значення змінної z.

Позначення: $z=f(x,y)$.

При цьому: змінна z називається залежною змінною або функцією;

змінні x і y називаються незалежними змінними або аргументами;

D називається областю визначення функції;

множина значень функції z називається областю зміни функції.

Зауваження. Сам закон відповідності може бути заданий різними способами: аналітично, тобто за допомогою формул; таблично; графічно та ін. Математичний аналіз, як правило, вивчає аналітично задані функції. Під областю визначення аналітично заданої функції $z=f(x,y)$ називається сукупність пар чисел $(x,\ y)$, яким відповідають дійсні значення функції.

Виберемо на площині прямокутну систему координат XOY і будемо зображати пари чисел $(x,\ y)$ точками площини з координатами $x,\ y$. Тоді область визначення функції $z=f(x,y)$ буде зображуватись деяко. множиною точок M площини. Тому функцію двох змінних часто називають функцією точки M площини і позначають $z=f(M)$, а її область визначення ототожнюють з множиною точок, що її зображають.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. Розглянемо в просторі прямокутну систему координат $OXYZ$. Область визначення D функції $z=f(x,y)$ зображується деякою множиною точок площини XOY. Кожній точці $M_0(x_0,y_0)\in D$ поставимо у відповідність точку простору $N_0(x_0,y_0,\ z_0)$, апліката якої дорівнює значенню функції в точці M_0: $z_0=f(x_0,y_0)$.Сукупність всіх таких точок являє собою деяку поверхню. Її приймають за графічне зображення функції $z=f(x,y)$. Отже, графіком функції $z=f(x,y)$ в просторі $OXYZ$ є поверхня, що являє собою геометричне місце точок $(x,y,f(x,y))$, коли точка $(x,\ y)$ пробігає область визначення функції.

Ще одним способом геометричної ілюстрації функції двох змінних.

Озн. *Лінією рівня функції* $z=f(x,y)$ називається геометричне місце точок $(x,\ y)$ площини, в яких функція приймає одне і те саме значення C.

Лінію рівня можна побудувати, спроектував на площину XOY множину точок простору $OXYZ$, що лежать в перетині поверхні, яка зображує функцію $z=f(x,y)$, і площини $z=C$. Рівняння лінії рівня має вигляд: $f(x,y)=C$. Змінюючи C, ми будемо отримувати різні лінії рівня для даної функції.

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

1) $z=x^2+y^2$;

2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x}}$.

Приклад 2. Знайти лінії рівня функції $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$.

п. 2.2. Означення функції багатьох змінних.

Поняття функції трьох змінних дається аналогічно випадку двох змінних.

Нехай D - множина пар дійсних чисел $(x,\ y,\ z)$.

Озн. Змінна u називається *функцією трьох змінних* $x,\ y,\ z$, якщо кожній трійці чисел $(x,\ y,\ z) \in D$ за певним правилом або законом ставиться у відповідність значення u.

При цьому $x,\ y,\ z$ називають незалежними змінними або аргументами функції, u - залежною змінною або функцією, а множину D - областю визначення функції.

Позначення: $u = f(x,\ y,\ z)$.

Зображаючи трійки чисел $(x,\ y,\ z)$ точками простору $OXYZ$, можемо розглядати функцію трьох змінних $u = f(x,\ y,\ z)$ як функцію точки $M(x, y, z)$ простору, тобто $u = f(M)$а область визначення функції трьох змінних – як деяку множину точок простору.

Зобразити функцію трьох змінних за допомогою графіка в тривимірному просторі неможна. Для наочного зображення функції трьох змінних використовують так звані поверхні рівня функції.

Озн. Поверхнею *рівня функції* $u = f(x, y,\ z)$ називається геометричне місце точок $(x,\ y, z)$ простору, в яких функція приймає одне і те саме значення *C*. Рівняння поверхні рівня: $f(x, y,\ z) = C$.

Означення функції двох і трьох змінних переноситься на випадок довільного числа змінних.

Нехай D - деяка множина систем $(x_1, x_2, ...,\ x_n)$ з n дійсних чисел ($n \in N$) або множина точок $M(x_1, x_2, ...,\ x_n)$ n-вимірного простору.

Озн. Змінна u називається *функцією* n *змінних* $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$, якщо кожній системі з n чисел $(x_1, x_2, ...,\ x_n) \in D$ за певним правилом або законом ставиться у відповідність певне значення змінної u.

Позначення: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Так само, як для $n = 2$ *і* $n = 3$, функції n змінних зручно розглядати як функції точки n-вимірного простору. Будемо називати точкою n-вимірного простору будь-яку систему з n дійсних чисел $(x_1, x_2, ...,\ x_n)$. Самі числа $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ називаються при цьому координатами точки $M(x_1, x_2, ...,\ x_n)$. Сукупність всіх таких точок складає n-вимірний простір.

Зауваження. Відстань між будь-якими двома точками $M_1\left(x_1^{\ 1}, x_2^{\ 1}, ..., x_n^{\ 1}\right)$ і $M_2\left(x_1^{\ 2}, x_2^{\ 2}, ..., x_n^{\ 2}\right)$ n-вимірного простору визначається за формулою:

$$M_1M_2 = \sqrt{\left(x_1^{\ 1} - x_1^{\ 2}\right)^2 + \left(x_2^{\ 1} - x_2^{\ 2}\right)^2 + ... + \left(x_n^{\ 1} - x_n^{\ 2}\right)^2}\ .$$

п. 2.3. Границя і неперервність функції багатьох змінних.

Озн. Множина всіх точок $M(x,\ y)$, координати яких задовольняють нерівність $\rho(M,\ M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, де $\rho(M,\ M_0)$ - відстань від M до M_0 називається δ - околом т. $M_0(x_0,\ y_0)$.

Нехай $z = f(x, y)$ задана в деякій області D і т. $M_0(x_0,\ y_0) \in D$ або т. $M_0(x_0,\ y_0) \notin D$, але має таку властивість, що в довільному δ-околі цієї точки міститься хоча б одна точка D відмінна від M_0.

Озн. Число A називається границею функції $z = f(M)$ в т. M_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх $M(x, y) \in D$, які задовольняють умову

$$0 < \rho(M, M_0) < \delta \text{, слідує } |f(M) - A| < \varepsilon .$$

Позначення: $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Геометрично це означає, що, яким би ні було число $\varepsilon > 0$, знайдеться настільки малий δ-окіл т. $M_0(x_0, y_0)$, що в усіх його точках $M(x, y)$, відмінних від M_0, аплікати відповідних точок поверхні, що зображують функцію $z = f(x, y)$, відрізняються від числа A за абсолютною величиною менше, ніж на ε.

Зауваження 1. Можна перенести основні теореми про границі для функції однієї змінної на випадок функції двох змінних.

Зауваження 2. Означення границі функції n змінних при $n > 2$ аналогічне означенню границі при $n = 2$, якщо в n- вимірному просторі ввести наступне поняття δ - околу.

Озн. δ - околом точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ називається множина точок $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, координати яких задовольняють нерівності:

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n^0\right)^2} < \delta .$$

Приклад. Обчислити: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.