Лекція №5

п. 2.4. Границя і неперервність функції багатьох змінних (продовження).

Озн. Функція $z = f(x, y)$, що визначена в деякому околі точки (x_0, y_0), називається *неперервною в цій точці*, якщо:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)}.$$

Користуючись означенням неперервності і теоремами про границі, можна довести, що для функцій двох змінних сума і добуток двох неперервних функцій є неперервною функцією; частка двох неперервних функцій є неперервна функція в точках, в яких знаменник відмінний від нуля; складена функція, яка утворена з декількох неперервних функцій, є неперервною функцією і т.д.

Раніше було розглянуто властивості функції однієї змінної, неперервної на відрізку. Аналогічні властивості мають місце для неперервних функцій двох змінних, якщо їх розглядати в так званих замкнутих обмежених областях, що є двовимірним аналогом відрізка. Для того, щоб сформулювати ці властивості, необхідні наступні означення.

Озн. Множина точок площини називається *зв'язною*, якщо будь-які дві точки цієї множини можна з'єднати неперервною кривою, яка цілком складається з точок цієї множини.

Озн. Точка M називається *внутрішньою точкою деякої множини*, якщо існує окіл цієї точки, який складається з точок даної множини.

Озн. Множина, кожна точка якої внутрішня, називається *відкритою множиною*.

Озн. Зв'язана відкрита множина точок площини називається *областю*.

Озн. Точка M називається *межовою точкою області*, якщо в будь-якому її околі є точки, які належать області і не належать області. Сукупність всіх межових точок області називається її *межею*.

Озн. Область разом з її межею називається *замкненою*.

Озн. Якщо існує круг скінченного радіуса, який цілком містить область, то ця область називається *обмеженою*.

Замкнена обмежена область для функції двох змінних є аналогом відрізка для функції однієї змінної.

Властивості неперервних функцій.

1. Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число $c > 0$, що для всіх точок області виконується нерівність $|f(M)| < c$.
2. Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває свого найбільшого і найменшого значень.
3. Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області D і $f(M_1) < c < f(M_2)$, де $M_1, M_2 \in D$, то існує точка $M_0(x_0, y_0)$, в якій $f(M_0) = c$.

п.2.5. Частинні похідні.

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі т. $M(x; y)$. Надамо змінній x приріст Δx, а значення y залишимо без змін так щоб т. $(x+\Delta x; y)$ належала даному околу. При цьому функція $f(x, y)$ одержить приріст:

$\boxed{\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}$ - частинний приріст функції $z = f(x, y)$ по x.

Озн. Якщо існує скінченна границя відношення $\Delta_x z$ до Δx при умові $\Delta x \to 0$, то її називають *частинною похідною функції* $z = f(x, y)$ *по* x.

Позначення: z'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Отже, за означенням:

$$\boxed{z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}}$$ (1) – частинна похідна від функції $z = f(x, y)$ по x.

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної від функції $z = f(x, y)$ по y.

$\boxed{\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}$ - частинний приріст функції $z = f(x, y)$ по y.

$$\boxed{z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}}$$ (2) – частинна похідна від функції $z = f(x, y)$ по y.

Позначення: z'_y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

При знаходженні z'_x (z'_y) обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x (y), вважаючи іншу змінну сталою. Тому частинні похідні знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функції однієї змінної.

Зауваження. Частинна похідна z'_x (z'_y) характеризує швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ в напрямі осі Ox (Oy).

Геометричний зміст частинних похідних

Розглянемо в просторі $OXYZ$ поверхню σ, що має рівняння $z = f(x, y)$.
Оскільки похідна функції однієї змінної x в даній точці дорівнює тангенсу кута нахилу до осі Ox дотичної до графіка функції в цій точці, то $f'(x_0, y_0)$ є тангенс кута α, що складається з віссю Ox дотичною, проведеною в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до перетину поверхні σ площиною $y = y_0$.
Тобто $f'_x(x_0, y_0) = tg\alpha$.
Аналогічно $f'_y(x_0, y_0) = tg\beta$.

Зауваження. Для функції n змінних поняття частинних похідних вводиться цілком аналогічно, як і для функції двох змінних. А саме, частинна похідна від функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по будь-якій з незалежних змінних в певній точці є границя відношення частинного приросту функції в цій точці до приросту відповідної незалежної змінної при прямуванні останнього до нуля (якщо ця границя існує і скінченна).

п. 2.6. Частинні похідні вищих порядків.

Частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ називають частинними похідними першого порядку. Їх можна розглядати як функції від $(x, y) \in D$. Ці функції можуть мати частині похідні, які називають частинними похідними другого порядку. Вони визначаються і позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні 3-го, 4-го і т. д. порядків.

$$z'''_{xxy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}\right)=\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2}.$$

Частинна похідна другого або більш високого порядку, що береться по різним змінним, називається мішаною частинною похідною. Такими, наприклад, є z''_{xy}, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, z'''_{xyx}.

Приклад 1. Знайти мішані похідні z''_{xy} та z''_{yx} для функції $z=5x^2+x^3y-4y^3$.

Теорема. Якщо функція $z=f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ неперервні в точці $M_0(x_0, y_0)$, тоді в цій точці:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}.$$

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого порядку по кожній з незалежних змінних для функцій: 1) $u=x^2z+arctg\frac{x}{y}$; 2) $u=x^y+3xz\cdot e^z$.