Лекція №6

п. 2.7. Диференційовність функції багатьох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Запишемо повний приріст функції в точці M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x, y).$$

Озн. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною в точці* $M(x, y)$, якщо її повний приріст в цій точці можна представити у вигляді:

$$\boxed{\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}, \quad (*)$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0$.

Сума перших двох доданків в рівності (*) являє собою головну частину приросту функції.

Озн. Головна частина приросту функції $z = f(x, y)$, лінійна відносно Δx *і* Δy, називається *повним диференціалом* цієї функції і позначається символом dz, тобто:

$$\boxed{dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y}. \quad \mathbf{(1)}$$

Теорема 1 (необхідна умова диференційованості функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці, має в ній частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$, при цьому $\frac{\partial z}{\partial x} = A$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Зауваження. Обернене твердження неправильне, тобто з неперервності функції не слідує її диференційовність.

З теореми 1 і рівності (1) матимемо:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Для незалежних змінних x *і* y вважають $\Delta x = dx, \ \Delta y = dy$.

Тоді:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy}. \quad \mathbf{(2)}$$

Введемо позначення: $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z}$ і $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z}$.

$d_x z$ - частинний диференціал функції $z = f(x, y)$ по змінній x,

$d_y z$ - частинний диференціал функції $z = f(x, y)$ по змінній y.

Отже, $dz = d_x z + d_y z$.

Теорема 2 (достатня умова диференційовності функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні z'_x *і* z'_y в точці $M(x, y)$, то вона диференційовна в цій точці і її повний диференціал виражається формулою (2).

З означення диференціала функції $z = f(x, y)$ слідує, що при достатньо малих $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ має місце наближена рівність: $\boxed{\Delta z \approx dz}$. **(3)**

Оскільки повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x; \ y + \Delta y) - f(x; y)$, рівність (3) можна переписати в такому вигляді:

$$\boxed{f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y} \quad \mathbf{(4)}$$

Формулою (4) користуються в наближених обчисленнях.

Зауваження 1. Повний диференціал dz називається диференціалом першого порядку. Диференціал другого порядку визначається формулою $d^2 z = d(dz)$.

Зауваження 2. Для функцій n змінних аналогічно вводяться поняття частинного та повного диференціалів. Якщо $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - диференційовна функція, то:

$$du = d_{x_1}u + d_{x_2}u + ... + d_{x_n}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n .$$

Приклад 1. Обчислити наближено $0{,}98^{3{,}03}$.

п. 2.8. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних.

Нехай задано поверхню σ рівнянням

$$F(x, y, z) = 0 .$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на поверхні σ і $F(x, y, z)$ - диференційовна в т. M_0 і не всі її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю. Можна показати, що дотичні до всіх кривих, які проходять через т. M_0 і лежать на поверхні, ортогональні до одного і того ж вектора

$$\bar{n} = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)).$$

Можна показати, що всі такі дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається дотичною площиною до поверхні σ в точці M_0. Оскільки ця площина проходить через т. M_0 і перпендикулярна до вектора $\bar{n}$, то її рівняння має вигляд:

$$\boxed{F'_x(M_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(M_0)\cdot(y - y_0) + F'_z(M_0)\cdot(z - z_0) = 0} \quad \textbf{(5)}$$

Озн. *Нормаллю до поверхні* σ в т. M_0 називають пряму, що проходить через т. M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через т. M_0 і має напрямний вектор $\bar{n}$, то канонічне рівняння нормалі має вигляд:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}} \quad \textbf{(6)}$$

Якщо рівняння поверхні σ задано в явній формі: $z = f(x, y)$, то, поклавши:
$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, дістанемо: $F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0)$, $F'_z(M_0) = -1$.

Тоді $\boxed{f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) = z - z_0}$ **(7)** – рівняння дотичної площини

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}$$ **(8)** – рівняння нормалі

Геометричний зміст повного диференціала.

З'ясуємо геометричний зміст повного диференціала функції $z = f(x, y)$.
Якщо в формулі (7) покласти $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, то ця формула запишеться у вигляді:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y .$$

Права частина є повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ в т. (x_0, y_0), тому:
$z - z_0 = dz$.Отже, повний диференціал функції двох змінних в т. (x_0, y_0) дорівнює приросту аплікати точки на дотичній площині до поверхні в т. $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, якщо від т. (x_0, y_0) перейти до т. $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні:

1) $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в т. $M(1; 2; 3)$; 2) $z = x^2 + y^2$ в т. $M(1; -2; 5)$.