Лекція №7

п. 2.9. Похідна складеної функції. Повна похідна.

Нехай $z=f(x,y)$ - функція двох змінних x і y, кожна з яких є функцією незалежної змінної t, тобто: $x=x(t),\ y=y(t)$. В цьому випадку функція $z=f(x(t),\ y(t))$ є складеною функцією однієї незалежної змінної t; змінні x і y називаються проміжними змінними.

Теорема. Якщо $z=f(x,y)$ - диференційовна в т. $M(x,\ y)\in D$ функція і $x=x(t),\ y=y(t)$ - диференційовні функції незалежної змінної t, то похідна складеної функції $z=f(x(t),\ y(t))$ називається повною похідною і обчислюється за формулою:

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}\quad(1)$$

Загальний випадок: нехай $z=f(x,y)$, де $x=x(u,\ v),\ y=y(u,v)$. Тоді $z=f(x(u,\ v),\ y(u,v))$- складена функція незалежних змінних u і v. Її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$ можна знайти, використовуючи формулу (1) так:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}},\quad(2)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}.\quad(3)$$

Приклад 1. Знайти $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ і $\frac{\partial u}{\partial \beta}$, якщо: $u=x^2\ln y,\ x=\frac{\alpha}{\beta},\ \ y=3\alpha-2\beta$.

п. 2.10. Похідна за напрямом.

Нехай функція $u=u(x,\ y,\ z)=u(M)$ визначена в деякій області D і точка $M(x,\ y,\ z)\in D$.

$\bar{l}$ - напрямлена пряма (вісь), що проходить через т. M.

Нехай точка $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\in D$ і точка M_1 лежить на осі $\bar{l}$.

Тоді $\Delta l=MM_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

Нехай т. M_1 наближається до т. M по осі $\bar{l}$.

$\Delta_l u=u(M_1)-u(M)$ - приріст функції в напрямі осі $\bar{l}$.

Озн. Якщо існує скінченна границя відношення $\Delta_l u$ до Δl при умові, що $\Delta l\to 0$ називається *похідною від функції* $u(M)$ *за напрямом* $\bar{l}$ в т. M і позначається $\frac{\partial u}{\partial l}$.

Отже, за означенням:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l u}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M_1)-u(M)}{\Delta l}}\quad(4)$$

Нехай функція $u=u(x,\ y,\ z)=u(M)$ диференційовна в т. M. Тоді, за означенням:

$$\Delta_l u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z+\varepsilon_1\cdot\Delta x+\varepsilon_2\cdot\Delta y+\varepsilon_3\cdot\Delta z,$$

де $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ нескінченно малі при $\Delta l\to 0$.

Маємо: $\Delta x=\Delta l\cdot\cos\alpha,\ \Delta y=\Delta l\cdot\cos\beta,\ \Delta z=\Delta l\cdot\cos\gamma$, де $\cos\alpha,\cos\beta,\ \cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\bar{l}$. Враховуючи це, матимемо:

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma + \varepsilon_1 \cdot \cos\alpha + \varepsilon_2 \cdot \cos\beta + \varepsilon_3 \cdot \cos\gamma$$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma \right),$$

оскільки $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \to 0$, коли $\Delta l \to 0$, остаточно матимемо:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma}$$ (5) – формула для обчислення похідної за напрямом

Зауваження. Нагадаємо, що напрямні косинуси вектора $\bar{a} = (x,\ y,\ z)$ находяться за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Зауваження. Подібно до того, як частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$ характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ характеризує швидкість зміни функції за напрямом $\bar{l}$.

п. 2.11. Градієнт. Властивості градієнта.

Нехай задано функцію $u = u(x,\ y,\ z)$ і точку $M(x,\ y,\ z)$.

Озн. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції u в т. M, називають *градієнтом функції* u в т. M.

Позначення: $grad\ u$.

Тобто: $$\boxed{grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}}$$ (6)

Властивості градієнта.

1. Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ в т. M має найбільше значення, якщо напрям $\bar{l}$ збігається з напрямом градієнта. При цьому: $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |grad\ u|$. Отже, швидкість зростання функції в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.

3. $grad\ (u+v) = grad\, u + grad\, v$.

$grad\ (Cu) = C \cdot grad\, u$, де $C = const$.

$grad\ (u \cdot v) = u \cdot grad\ v + v \cdot grad\, u$.

$$grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot grad u - u \cdot grad v}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в т. $A(1; 2; -1)$ за напрямом від т. A до т. $B(2;\ 4;\ -3)$.

Приклад 3. Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в т. $M_0(0; 1;\ 2)$ та найбільшу швидкість зростання функції в цій точці.