Лекція №8

п. 2.12. Екстремуми функції багатьох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D, а точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Озн. Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається *точкою локального максимуму функції* $z = f(x, y)$, якщо існує такий δ-окіл точки $M_0(x_0, y_0)$, що для кожної точки $M(x, y)$, відмінної від M_0, з цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$.

Озн. Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається *точкою локального мінімуму функції* $z = f(x, y)$, якщо існує такий δ-окіл точки $M_0(x_0, y_0)$, що для кожної точки $M(x, y)$, відмінної від M_0, з цього околу виконується нерівність $f(M) > f(M_0)$.

Озн. Точки локального мінімуму і локального максимуму називається *точками локального екстремуму* (надалі просто екстремуму).

Озн. Значення функції в точці максимуму (мінімуму) називається *максимумом (мінімумом) функції.* Максимум і мінімум функції називають її *екстремумами*.

Теорема 1 (необхідні умови екстремуму). Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні першого порядку по x *і* y в цій точці рівні нулю або не існують.

Зауваження. Аналогічна теорема має місце для функції n змінних.

Озн. Точку, в якій частинні похідні першого порядку по кожній з незалежних змінних функції $z = f(x, y)$ дорівнюють нулю, називається *стаціонарною точкою функції* z.

Озн. Стаціонарні точки та точки, в яких хоча б одна частинна похідна функції не існує, називаються *критичними точками* цієї функції.

Зауваження. В критичних точках функція може мати екстремум, а може не мати.

Теорема 2 (достатня умова екстремуму). Нехай в стаціонарній точці (x_0, y_0) і деякому її околі функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Обчислимо в точці (x_0, y_0) значення $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Позначимо:

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2}.$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум: максимум, якщо $A < 0$; мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) не має екстремуму;

3) якщо $\Delta = 0$, то функція $f(x, y)$ може мати екстремум в точці (x_0, y_0), а може і не мати, потрібні додаткові дослідження.

Приклад 1. Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Зауваження. Якщо $d^2 f(M_0) > 0$, то $f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) мінімум. Якщо $d^2 f(M_0) < 0$, то $f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) максимум.

п. 2.13. Умовний екстремум функції.

Нехай в області D задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію L, яка визначається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить в цій області. Задача полягає у тому, щоб на лінії L знайти таку точку $M(x, y)$, в якій значення функції $z = f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значенням цієї функції в інших точках лінії L. Такі точки $M(x, y)$ називають *точками умовного екстремуму* функції $z = f(x, y)$ на лінії L. При цьому рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається *рівнянням* *зв'язку.*

Можна показати, що знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x,\ y)$ зводиться до знаходження звичайного екстремуму функції:

$$\boxed{F(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda \cdot \varphi(x,\ y)}.$$

При цьому функція $F(x,\ y,\ \lambda)$ називається функцією Лагранжа, а λ - множником Лагранжа.

Зауваження. Стаціонарні точки функції Лагранжа шукають з системи: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$

При цьому характер умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо в стаціонарній точці $d^2F > 0$ $(d^2F < 0)$, то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

п. 2.14. Найбільше та найменше значення функції.

Нехай функція $z = f(x,\ y)$ визначена і неперервна в замкненій обмеженій області D. Тоді вона досягає в області D свого найбільшого M і найменшого m значень (так званий глобальний екстремум). Ці значення досягаються функцією в точках, розташованих всередині області D, або в точках на її межі.

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень диференційовної в області D функції $z = f(x,\ y)$ полягає в наступному.

1. Знайти всі критичні точки функції, що належать D і обчислити значення функції в них.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x,\ y)$ на межі області.

3. Порівняти всі знайдені значення функції і вибрати з них найбільше M і найменше m.

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутій області, обмеженої лініями: $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = -1{,}5.$