Лекція №9

Змістовий модуль 2. Інтегральне числення.

Тема 1. Невизначений інтеграл.

п. 1.1. Означення первісної функції та невизначеного інтеграла.

Озн. Функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ на проміжку $[a,b]$, якщо $F(x)$ - диференційовна на $[a,b]$ і для $x\in[a,\ b]$:

$$\boxed{F'(x)=f(x)} \qquad (1)$$

Наприклад: нехай $f(x)=x^3$, тоді первісною $f(x)$ буде функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$, оскільки $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$. Але і будь-яка функція виду $\frac{x^4}{4}+C$, де C - довільна стала, також є первісною $f(x)$. Отже, в даному випадку первісних безліч. А чи завжди так?

Теорема. Якщо функція має первісну, то вона має безліч первісних, при будь-які дві з низ відрізняються одна від одної постійним доданком.

З теореми слідує, що для даної функції $f(x)$ достатньо знайти тільки яку-небудь одну первісну функцію $F(x)$, щоб знати всі її первісні, так як вони відрізняються одна від одної сталими доданками. Отже, вираз $F(x)+C$, де C – довільна стала, являє собою загальний вигляд функції, яка має своєю похідною функцію $f(x)$ або диференціал $f(x)\,\mathrm{d}x$.

Озн. Дія відшукання первісних називається *невизначеним інтегруванням*, а вираз, що охоплює сукупність всіх первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx.$$

При цьому: функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією,

$f(x)dx$ - підінтегральним виразом,

x - змінною інтегрування.

З теореми і означення невизначеного інтеграла слідує, що:

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}, \quad (2)$$

де $F(x)$ - первісна $f(x)$, а C - довільна стала.

Отже, знайти невизначений інтеграл від функції $f(x)$ - це означає знайти всі первісні цієї функції. З геометричної точки зору, невизначений інтеграл є сукупністю кривих $y=F(x)+C$, кожна з яких називається інтегральною кривою і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі вздовж осі Oy.

п. 1.2. Властивості невизначеного інтеграла.

1. $(\int f(x)\mathrm{d}x)'=f(x)$.

Згідно з цією властивістю знаки похідної і невизначеного інтеграла взаємно знищуються. Тому правильність знаходження невизначеного інтеграла перевіряється диференціюванням.

2. $\mathrm{d}(\int f(x)\,\mathrm{d}x)=f(x)\,\mathrm{d}x$;

3. $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$;

4. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, де k – стала;

5. $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

п. 1.3. Таблиця основних невизначених інтегралів

Наступні інтеграли називаються табличними. Мета існуючих методів інтегрування полягає у тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного.

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $(n \neq -1)$, зокрема:

   $\int \mathrm{d}x = x + C$, $\quad \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\dfrac{1}{x}+C$, $\quad \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$.

2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a}+C \qquad (a>0,\ a\neq 1)$,

   $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$.

4. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

6. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$.

7. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$.

8. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a}+C.$

9. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\,arctg\,\dfrac{x}{a}+C$.

10. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$.

11. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm A}\right|+C$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\dfrac{x}{2}\right|+C$.

п. 1.4. Знаходження невизначеного інтеграла на підставі теореми про інваріантність формул інтегрування

Теорема (про інваріантність формул інтегрування). Якщо $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ – диференційовна функція, то

$$\boxed{\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+C}. \quad (3)$$

Ця властивість невизначеного інтеграла означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою, незважаючи на те, якою є змінна інтегрування – незалежною змінною, чи функцією, що має неперервну похідну.

Приклади.

1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C \,.$$

2) $$\int \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}(x+5) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3} + C \,.$$

3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+4x} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(3+4x)}{3+4x} = \frac{1}{4}\ln|3+4x| + C \,.$$

4) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \,.$$

5) $$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \,.$$

6) $$\int (e^x+1)^3\,\mathrm{d}x = \int (e^{3x}+3e^{2x}+3e^x+1)\,\mathrm{d}x = \int e^{3x}\,\mathrm{d}x + 3\int e^{2x}\,\mathrm{d}x +$$
$$+3\int e^x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x + x + C \,.$$

7) $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} - \int \sin x\,\mathrm{d}(\sin x) = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + C \,.$$

8) $$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\cdot 2^x - \frac{1}{5}\cdot 5^x}{2^x \cdot 5^x}\,\mathrm{d}x = 2\int 5^{-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int 2^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\ln 5}\cdot 5^{-x} + \frac{1}{5\ln 2}\cdot 2^{-x} + C \,.$$

9) $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{5+7x^2} = \frac{1}{14}\int \frac{\mathrm{d}(5+7x^2)}{5+7x^2} = \frac{1}{14}\ln(5+7x^2) + C \,.$$