Лекція №10

п. 1.5. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ і нехай функції u і v мають неперервні похідні $u'(x)$ і $v'(x)$. Тоді має місце формула

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}. \quad (1)$$

Формула 1 називається формулою *інтегрування частинами*. Вона дає змогу від інтегрування виразу $u\,\mathrm{d}v$ переходити до інтегрування виразу $v\,\mathrm{d}u$.

При застосуванні формули (1) потрібно розкласти підінтегральний вираз на множники u і $\mathrm{d}v$, з яких перший диференціюється, а другий інтегрується при переході до інтеграла у правій частині. Як правило, потрібно намагатися, щоб інтегрування диференціала $\mathrm{d}v$ було зручним і щоб $\int v\,\mathrm{d}u$ був або табличним, або зводився до табличного відомими способами.

Зазначимо, що під час знаходження функції v за диференціалом $\mathrm{d}v$ вважають, що стала $C = 0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливатиме.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами:

1) інтеграли вигляду $\int P_n(x)e^{kx}\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n від x, k – дійсне число. У цих інтегралах покладають $u = P_n(x)$;

2) інтеграли вигляду $\int P_n(x)\ln x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n від x. У цих інтегралах покладають $\mathrm{d}v = P_n(x)\,\mathrm{d}x$;

3) інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$, де α, β – дійсні числа. Після двократного застосування формули (1) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять шуканий інтеграл.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int x^2\cos 7x dx$.

$$\int x^2\cos 7x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x^2, & \mathrm{d}v = \cos 7x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x, & v = \frac{1}{7}\sin 7x \end{matrix} \right| = \frac{1}{7}x^2\sin 7x - \frac{2}{7}\int x\sin 7x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, & \mathrm{d}v = \sin 7x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = \frac{1}{7}\cos 7x \end{matrix} \right| = \frac{1}{7}x^2\sin 7x - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{7}x\cos 7x - \frac{1}{7}\int\cos 7x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{7}x^2\sin 7x - \frac{2}{49}x\cos 7x + \frac{2}{343}\sin 7x + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int x\ln(x+5)dx$.

$$\int x\ln(x+5)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln(x+5), & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x+5}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2\ln(x+5) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x+5} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+5) - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2-25)+25}{x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(x+5) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(x - 5 + \frac{25}{x+5}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(x+5) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{25}{2}\ln|x+5| + C.$$

п. 1.6. Метод заміни змінної або метод підстановки

Теорема. *Якщо*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in (a;\, b),$$

і функція $x = \varphi(t)$ *визначена і має неперервну похідну, то*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + C, \qquad t \in (\alpha;\, \beta).$$

Дана теорема застосовується, як правило, одним із таких двох способів:

1) $$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t, \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)dt = F(t) + C =$$
$$= F(\varphi(x)) + C.$$

2) $$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \psi(t), \\ \mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t, \\ t = \psi^{-1}(x). \end{array} \right| = \int g(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C = G(\psi^{-1}(x)) + C$$

(у цьому випадку $t = \psi^{-1}(x)$ – обернена функція для функції $x = \psi(t)$).

Звернемо увагу на те, що після обчислення невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно від введеної змінної інтегрування перейти до заданої змінної.

Таким чином, при інтегруванні методом заміни змінної використовують підстановки двох видів: $t = \varphi(x)$ і $x = \psi(t)$. Ці підстановки підбирають так, щоб нові інтеграли, які одержані після перетворень, були табличними, або зводились до табличних відомими методами.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$.

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{2-x} = t, \\ 2 - x = t^2, \\ x = 2 - t^2, \\ \mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{(2-t^2)^2\, 2t\,\mathrm{d}t}{t} = -2\int (4 - 4t^2 + t^4)\,\mathrm{d}t = -2\left(4t - 4\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + C =$$
$$= -2(4\sqrt{2-x} - 4\frac{\sqrt{(2-x)^3}}{3} + \frac{\sqrt{(2-x)^5}}{5} + C.$$

Інтегрування двочленів виду: $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$, $x^2 - a^2$**.**

1) при наявності у підінтегральному виразі $\sqrt{a^2 - x^2}$ варто спробувати підстановку:

$$\boxed{x = a\sin t,\ x = a\cos t};$$

2) при наявності у підінтегральному виразі $\sqrt{a^2 + x^2}$ варто спробувати підстановку:

$$\boxed{x = a\,\mathrm{tg}\,t};$$

3) при наявності у підінтегральному виразі $\sqrt{x^2 - a^2}$ варто спробувати підстановку:

$$\boxed{x = \frac{a}{\cos t}}.$$

Приклад 4. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}}$; 3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$.