# Лекція №11

## п. 1.7. Раціональні функції.

**Озн.** *Многочленом або цілою раціональною функцією* називається функція виду:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де $n$ - натуральне число, яке називається степенем многочлена, $a_i\,(i = 0,1,\ldots,n)$ -сталі коефіцієнти.

**Озн.** *Коренем многочлена* $P_n(x)$ називається таке значення $x_0$ змінної $x$, при якому многочлен перетворюється в нуль, тобто: $P_n(x_0) = 0$.

**Теорема.** Будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на лінійні і квадратні множники з дійсними коефіцієнтами, тобто будь-який многочлен $P_n(x)$ можна представити у вигляді:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}.$$

При цьому $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$ і всі квадратні тричлени не мають дійсних коренів.

**Озн.** *Дробово-раціональною функцією або раціональним дробом* називається функція, яка рівна відношенню двох многочленів, тобто функція виду: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

**Озн.** Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника менше степеня знаменника, тобто $m < n$; в іншому випадку (коли $m \ge n$) раціональний дріб називається *неправильним*.

Будь-який неправильний раціональний дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можна представити у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, тобто:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Представлення неправильного раціонального дробу у вигляді такої суми називається виділенням цілої частини з раціонального дробу. Отже, оскільки з неправильного раціонального дробу можна виділити цілу частину, інтегрування якої не представляє труднощів, то досить розглянути алгоритм інтегрування тільки правильних дробів.

**Приклад 1.** Виділити цілу частину з дробу $\dfrac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1}$.

## п. 1.8. Елементарні дроби та їх інтегрування.

Елементарними раціональними дробами називають дроби таких 4-х видів:

**1.** $\boxed{\dfrac{A}{x-a}}$. **2.** $\boxed{\dfrac{A}{(x-a)^k}}$. **3.** $\boxed{\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}}$. **4.** $\boxed{\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}}$.

Тут $A,\ M,\ N,\ a,\ p,\ q$ - дійсні числа і $p^2 - 4q < 0$, $k = 2,3,\ldots;\ m = 2,3,\ldots$ .

Проінтегруємо елементарні дроби кожного з 4-х видів.

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{A}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q}dx = \begin{vmatrix} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{Mt + N - \frac{Mp}{2}}{t^2 + a^2}dt =$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{4q-p^2}}+C\,.$$

4. $$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^m}dx=\left|\begin{array}{l}x+\frac{p}{2}=t\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}\,.$$

Другий інтеграл можна знайти за рекурентною формулою:

$$I_{m+1}=\frac{1}{2ma^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^m}+\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{a^2}I_m\,.$$

## п. 1.9. Розклад правильних раціональних дробів на елементарні. Інтегрування раціональних дробів.

**Теорема.** Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якої розкладено на множники:

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m}\,,$$

можна представити і при цьому єдиним чином у вигляді суми елементарних дробів.

При цьому кожному множнику виду: $(x-x_1)^{k_1}$ відповідає рівно $k_1$ дробів виду:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-a)^{k_1}}\,,$$

а кожному множнику виду: $\left(x^2+px+q\right)^{s_1}$ відповідає рівно $s_1$ дробів виду:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{\left(x^2+px+q\right)^{s_1}}\text{, де }p^2-4q<0\,.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів: $A_1, A_2,\ldots,A_{k_1},\ldots,N_1,N_2,\ldots,N_{s_1}$ можна застосувати метод невизначених коефіцієнтів. Сутність методу наступна.

1. Праву частину рівності (розкладу раціонального дробу на елементарні) зводимо до спільного знаменника $Q(x)$. В результаті отримаємо тотожність: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{S(x)}{Q(x)}$, де $S(x)$ - многочлен з невизначеними коефіцієнтами.

2. Оскільки в отриманій тотожності знаменники рівні, то тотожно рівні і чисельники, тобто: $P(x)=S(x)$.

3. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$ в обох частинах тотожності, одержимо систему лінійних рівнянь (ця система має єдиний розв'язок), з якої і визначимо шукані коефіцієнти.

*Зауваження.* Для знаходження невизначених коефіцієнтів застосовують також метод окремих значень аргументу: після отримання тотожності $P(x)=S(x)$ аргументу $x$ надають конкретні числові значення стільки разів, скільки є невизначених коефіцієнтів (зазвичай замість $x$ підставляють значення дійсних коренів многочлена $Q(x)$).

**Приклад 2.** Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{x^5+2}{x^3-1}dx$; 2) $\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$.