Лекція №12

п. 1.10. Універсальна тригонометрична підстановка.

Зауваження. Інтеграл від елементарної функції не завжди є елементарною функцією. Кажуть, що такі інтеграли не виражаються в скінченному вигляді.

Наприклад: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$.

Оскільки раціональні функції завжди інтегруються в скінченному вигляді, то в подальшому основним прийомом інтегрування буде пошук підстановок $t=\varphi(x)$, які б зводили підінтегральний вираз до раціонального вигляду.

Розглянемо деякі випадки знаходження інтеграла від тригонометричних функцій. Функцію зі змінними $\sin x$ *і* $\cos x$, над якими виконуються раціональні операції (додавання, віднімання, множення і ділення), прийнято позначати $R(\sin x, \cos x)$, де R - знак раціональної функції. Обчислення невизначених інтегралів типу $\int R(\sin x, \cos x)dx$ зводиться до обчислення інтегралів від раціональної функції підстановкою:

$\boxed{tg\frac{x}{2}=t}$, яка називається універсальною.

При цьому $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, тоді $\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$.

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-tg^2\frac{x}{2}) = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, тоді $\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$.

$\frac{x}{2} = arctgt$, $x = 2arctgt$, тоді $\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$.

Тому $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$, де

$R_1(t)$ - раціональна функція від t, яка завжди інтегрується в скінченному вигляді. Отже, універсальна тригонометрична підстановка завжди дає результат, хоча в багатьох випадках призводить до досить громіздких викладок.

На практиці застосовують і інші, більш прості підстановки, в залежності від властивостей і вигляду підінтегральної функції. А саме:

1) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ - *непарна відносно* $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\boxed{t=\cos x}$ раціоналізує інтеграл;

2) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ - *непарна відносно* $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\boxed{t=\sin x}$ раціоналізує інтеграл;

3) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ - *парна відносно* $\sin x$ *і* $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\boxed{t=tgx}$ раціоналізує інтеграл.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$; 2) $\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$; 3) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}$.

п. 1.11. Інтегрування деяких іраціональностей.

Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, де R - раціональна функція двох аргументів, a, b, c, d - дійсні числа, m - натуральне число.

Покладемо $\boxed{t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$, тоді $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, $cxt^m + dt^m = ax+b$, $x = \frac{b-dt^m}{ct^m - a} = \varphi(t)$,

$dx = \frac{-dmt^{m-1}(ct^m - a) - mct^{m-1}(b-dt^m)}{(ct^m - a)^2}$.

Тоді інтеграл матиме вигляд $\int R(\phi(t), t) \cdot \phi'(t) dt$, де R, ϕ, ϕ' - раціональні функції.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Інтегрування диференціальних біномів.

Озн. Вираз виду $x^m (a+bx^n)^p$, де m, n, p - раціональні числа, а a і b - дійсні числа, називається *диференціальним біномом*.

Теорема Чебишева. Інтеграл від диференціального бінома:

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

1) $\boxed{p}$- ціле число і виконано підстановку $\boxed{x = t^s}$, де s - найменший спільний знаменник дробів m і n;

2) $\boxed{\frac{m+1}{n}}$ - ціле число і виконано підстановку $\boxed{a + bx^n = t^r}$, де r - знаменник дробу p;

3) $\boxed{\frac{m+1}{n} + p}$ - ціле число і виконано підстановку $\boxed{a + bx^n = t^r x^n}$, де r - знаменник дробу p.

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

Приклад 3. Знайти інтеграли:

$$1)\ \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx; \qquad 2)\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$