Лекція №13

Тема 2. Визначений інтеграл.

п. 2.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

1. Задача про площу криволінійної трапеції.
Нехай на відрізку $[a,b]$ задано функцію $y = f(x) \geq 0$.

Озн. Фігура $aABb$, що обмежена графіком функції $y = f(x) \geq 0$ і відрізками прямих $y = 0,\ x = a,\ x = b$ називається *криволінійною трапецією*.

Знайдемо площу криволінійної трапеції.
Розіб'ємо $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n.$ В кожному з цих відрізків навмання виберемо точку $\xi_i,\ i = 1, \ldots, n.$ Отже, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
$f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - площа прямокутника з основою Δx_i і висотою $f(\xi_i)$. Тоді $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$ - площа ступінчатої фігури.
Нехай S - площа криволінійної трапеції:
$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$. Тоді:

$$\boxed{S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i} \quad (1)$$

2. Задача про роботу змінної сили.
Нехай на матеріальну точку діє сила $F(x)$, яка стала за напрямом і неперервно змінюється за величиною, і нехай під дією сили $F(x)$ точка перемістилася вдовж осі Ox з т. a в т. b $(a < b)$. Обчислимо роботу A цієї сили на відрізку $[a,\ b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a,\ b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n.$
Припустимо, що кожен з відрізків настільки малий, що силу $F(x)$ на ньому можна вважати сталою і рівною $F(\xi_i)$, де $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тоді:

$F(\xi_i)\cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - робота, виконана цією силою на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n.$

Оскільки $F(x)$ на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ змінюється, то: $A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\cdot \Delta x_i$. Тоді:

$$\boxed{A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\cdot \Delta x_i} \quad (2)$$

3. Задача про шлях, що пройшла точка.
Нехай точка рухається по прямій зі швидкістю $v = v(t)$ і v - неперервна функція. знайдемо шлях S, що пройшла точка за проміжок часу від моменту $t = a$ до моменту $t = b$ $(a < b)$.

Розіб'ємо відрізок $[a,\ b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ на n відрізків $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n.$

Припустимо, що кожен з відрізків настільки малий, що швидкість $v(t)$ на ньому можна вважати сталою і рівною $v(\xi_i)$, де $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Тоді рух на проміжку $[t_{i-1}, t_i]$ є рівномірним. Тому:

$v(\xi_i)\cdot \Delta t_i$, де $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ - шлях, пройдений точкою за час Δt_i.

Оскільки $v(t)$ на відрізку $[t_{i-1}, t_i]$ змінюється, то: $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\cdot \Delta t_i$. Тоді:

$$\boxed{S = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\cdot \Delta t_i} \quad (3)$$

4. Задача про масу неоднорідного стержня.

Нехай маємо прямолінійний стержень, який лежить на осі Ox в межах відрізку $[a, b]$. Густина стержня $\rho = \rho(x)$ - неперервна функція від $x \in [a, b]$. Знайдемо масу m стержня.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n.$

Припустимо, що кожен з відрізків настільки малий, що густина $\rho = \rho(x)$ на цьому відрізку стала і рівна $\rho(\xi_i)$, де $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тоді:

$\rho(\xi_i)\cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - маса частини стержня Δx_i

Оскільки $\rho(x)$ на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ змінюється, то: $m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i)\cdot \Delta x_i$. Тоді:

$$\boxed{m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\cdot \Delta x_i} \quad (4)$$

п. 2.2. Означення та умови існування визначеного інтеграла.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$, $a < b$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n.$ На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ візьмемо довільну точку ξ_i і побудуємо суму:

$$\boxed{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i,} \quad (*) \qquad \text{де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Озн. Сума (*) називається *інтегральною сумою* функції $f(x)$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і даному вибору точок ξ_i.

Нехай $\lambda = \max\limits_{i} \Delta x_i$.

Озн. Якщо існує скінченна границя сум (*) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від розбиття відрізку $[a, b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається:

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Тоді: $f(x)$ називається інтегрованою функцією на відрізку $[a, b]$,

a і b - називаються відповідно нижньою і верхньою межею інтегрування,

$[a, b]$ - називається відрізком інтегрування.

Тоді, за означенням, $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i}$ (5)

Теорема 1 (достатня умова інтегрованості). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегрована на відрізку $[a, b]$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a, b]$ і неперервна на ньому скрізь, крім скінченного числа точок, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Зауваження. Порівнюючи формули (1), (2), (3), (4) матимемо:

1) $\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$ (6) - площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)\geq 0$.

2) $\boxed{A=\int_a^b F(x)dx}$ (7) – робота змінної сили $F(x)$.

3) $\boxed{S=\int_a^b v(t)dt}$ (8) – шлях, що пройшла точка за час від $t=a$ до $t=b$ зі швидкістю $v(t)$.

4) $\boxed{m=\int_a^b \rho(x)\,dx}$ (9) – маса неоднорідного стержня з густиною $\rho=\rho(x)$.

п. 2.3. Властивості визначеного інтеграла.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(z)dz.$$

2. $\int_a^a f(x)dx=0$.

3. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

4. Якщо $f(x)$ інтегрована на максимальному з відрізків $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,d]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

яким би не було взаємне розташування точок a, b, c.

5. Якщо $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$, то і $k\cdot f(x)$, де $k=const$, також інтегрована на цьому проміжку і при цьому

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

6. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на проміжку $[a, b]$, то і $f(x)+g(x)$ також інтегрована на цьому проміжку і при цьому:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

7. Якщо $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$, $f(x)\geq 0$ і $a<b$, то:

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0.$$

8. Якщо $f(x)\,i\;g(x)$ - інтегровані на проміжку $[a,b]$, $f(x)\leq g(x)$ і $a<b$, то:

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx.$$

9. Нехай $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$ і $a<b$, тоді:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx.$$

10. Якщо $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$ і $a<b$, і. якщо $m\leq f(x)\leq M$ для всіх $x\in[a,b]$, то:

$$m\cdot(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a).$$