Лекція №14

п. 2.4. Теорема про середнє значення.
Інтеграл із змінною верхньою межею.

Теорема (про середнє значення). Нехай $f(x)$ неперервна на $[a, b]$. Тоді на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)}.$$

Нехай $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, тоді вона інтегрована на будь-якому відрізку $[a, x]\subset[a, b]$, тобто для довільного $x\in[a, b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(t)dt$. При цьому змінна інтегрування позначена через t, щоб не плутати її із верхньою межею. Цей інтеграл є функцією від x, тобто:

$$\boxed{\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt} \quad (*)$$

Озн. Інтеграл (*) називається *інтегралом із змінною верхньою межею.*

Геометричний зміст інтеграла (*):
якщо $f(x)\geq 0,\ x\in[a, b]$, то
$\Phi(x)$ - площа заштрихованої криволінійної трапеції.

Теорема. Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі, тобто:

$$\boxed{\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)}.$$

Наслідок. Для будь-якої неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція. При цьому однією з первісних є інтеграл зі змінною верхньою межею (*).

Тобто, якщо $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, де $F(x)$ - первісна для $f(x)$, а $C = const$

Отже, ця теорема розкриває зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

п. 2.5. Формула Ньютона - Лейбніца.

Теорема. Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною для неперервної функції $f(x)$, коли $x\in[a, b]$, то справедлива формула:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)} \quad (1).$$

Зауваження. Формула Ньютона-Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених від верхньої і нижньої межі інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx; \qquad 2)\ \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx.$$

п. 2.6. Інтегрування частинами
та метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

Теорема 1. Якщо $u = u(x), v = v(x)$ мають на відрізку $[a, b]$ неперервну похідну, то:

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du} \quad (2)$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл: $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови:
1) $f(x)$ неперервна на $[a, b]$;
2) $x = \psi(t)$ і $x' = \psi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$;
3) $\psi(\alpha) = a,\ \psi(\beta) = b,\ a < \psi(t) < b$, коли $t \in [\alpha, \beta]$.

Тоді справджується рівність:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt}.$$

Зауваження 1. Якщо при знаходженні невизначеного інтеграла за допомогою підстановки $x = \psi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до x, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \psi(t)$, а верхня межа β як розв'язок рівняння $b = \psi(t)$.

Якщо $\psi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар значень α *і* β, які задовольняють теорему 2, у такому випадку можна взяти будь-яку пару.

Зауваження 2. Часто замість підстановки $x = \psi(t)$, застосовують підстановку $t = \varphi(x)$. У цьому випадку межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b)$. Проте слід мати на увазі, що функція, обернена до $\varphi(x)$ має задовольняти всі умови теореми 2.

Найзручніше виконувати заміну монотонно диференційованими функціями. Такі функції гарантують однозначність як прямої, так і оберненої функцій.

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx; \qquad 2)\ \int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}dx.$$