Лекція №15

Тема 3. Застосування визначеного інтеграла.

п. 3.1. Знаходження площ плоских фігур.

Раніше було показано, що, коли $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, що спирається на $[a, b]$ і обмежена графіком функції $y = f(x)$, обчислюється за формулою: $\boxed{S = \int_a^b f(x)dx.}$ (1)

Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то $\boxed{S = -\int_a^b f(x)dx.}$ (2)

Об'єднавши формули (1) і (2) матимемо:

$$\boxed{S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|} \quad (3)$$

Площа фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$ $і$ $y = f_2(x)$,
прямими $x = a$ i $x = b$ за умови, що $f_2(x) \geq f_1(x)$,
знаходиться за формулою:

$$\boxed{S_{ф} = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}. \quad (4)$$

Розглянемо криволінійну трапецію, яка зліва обмежена віссю Oy, справа графіком функції $x = \phi(y)$, знизу і зверху відрізками прямих $y = c,\ y = d$. Площа такої криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$\boxed{S = \int_c^d \phi(y)dy} \quad (5)$$

Площа фігури, обмеженої лініями $x = \varphi_1(y)$ $і$ $x = \varphi_2(y)$,
прямими $y = c$ i $y = d$ за умови, що $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$,
знаходиться за формулою:

$$\boxed{S_{ф} = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy} \quad (6)$$

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженою віссю Ox і графіком функції $y = x^2 - 2x,\ \ x \in [0, 3]$.

Площа криволінійної трапеції, обмеженої параметрично заданою кривою.

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

прямими: $x = a,\ \ x = b$ і віссю Ox, то її площа знаходиться за формулою:

$\boxed{S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt}$, (7) де α i β визначаються з рівностей: $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$.

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою: $x = a\cos^3 t,\ \ y = b\sin^3 t$.

Полярні координати.

Озн. *Криволінійним сектором* називається фігура, обмежена кривою, що задана в полярній системі координат неперервною функцією $\rho=\rho(\varphi)$ і променями $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta$.

Можна показати, що площа криволінійного сектора обчислюється за формулою:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi} \quad (8)$$

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho=a\cos 3\varphi$.

п. 3.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої.

Нехай в прямокутних координатах задано плоску криву AB, рівняння якої $y=f(x)$, де $a\le x\le b$.

Під *довжиною дуги* AB розуміють границю, до якої прямує довжина лінії, вписана в цю дугу, коли число ланок ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої ланки прямує до нуля.

Коли функція $y=f(x)$ і її похідна $y'=f'(x)$ неперервні на відрізку $[a,\,b]$, то крива AB має довжину, рівну:

$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx} \quad (9)$$

Доведення формули (9).

Застосуємо метод диференціала.

Візьмемо довільне значення $x\in[a,\,b]$ і розглянемо змінний відрізок $[a,\,x]$. На ньому величина l стає функцією від x, тобто $l=l(x)\quad (l(a)=0,\ l(b)=l)$.
Знаходимо диференціал dl функції $l=l(x)$ при зміні x на малу величину $\Delta x=dx$: $dl=l'(x)dx$. Знайдемо $l'(x)$, замінюючи нескінченно малу дугу MN хордою Δl, що стягує цю дугу: $l'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+(y'_x)^2}$. Отже, $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

Інтегруючи dl в межах від a до b, одержимо: $l=\int_a^b\sqrt{1+(y'_x})^2\,dx$.

Якщо **рівняння кривої задано в параметричній формі**: $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), & \alpha\le t\le\beta,\end{cases}$

де $x(t)$ *і* $y(t)$ - неперервні функції з неперервними похідними і $x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$, то довжина l кривої AB знаходиться за формулою:

$$\boxed{l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt} \quad (10)$$

Формула (10) може бути одержана з формули (9) підстановкою: $x=(t),\ dx=x'(t)dt,\ f'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Приклад 4. Знайти довжину однієї арки циклоїди: $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$.

Якщо **крива AB задана рівнянням в полярних координатах**: $\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$.

Припустимо, що $\rho(\varphi)\, i\ \rho'(\varphi)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\ \beta]$.

Тоді, вважаючи кут φ параметром, з формули (10) одержимо:

$$\boxed{l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi} \quad (11)$$

Приклад 5. Знайти довжину дуги кардіоїди: $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

п. 3.3. Обчислення об'ємів тіл.
Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів.

Нехай треба знайти об'єм V тіла , при цьому відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад осі $Ox: S=S(x),\ a\le x\le b$.

Застосуємо метод диференціала.

Через довільну т. $x\in[a,\ b]$ проведемо площину, перпендикулярну Ox.

Нехай $S(x)$ - площа перетину тіла цією площиною;

$S(x)$ - неперервно змінюється при зміні x.

Нехай $v(x)$ - об'єм частини тіла, що лежить лівіше площини.

Будемо вважати, що на відрізку $[a,\ x]$ величина v є функцією від x,

тобто $v=v(x)$ ($v(a)=0,\ v(b)=V$). Знайдемо диференціал dV. Він являє собою елементарний шар тіла, що заключний між паралельними площинами, що перетинає вісь Ox в точках x і $x+\Delta x$, який наближено може бути прийнятий за циліндр з основою $S(x)$ і висотою dx. Тому $dV=S(x)dx$. Тоді:

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx} \quad (12)$$ – об'єм тіла за площами паралельних перерізів

Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай навколо осі Ox обертається криволінійна трапеція, що обмежена неперервною лінією $y=f(x)\ge 0$ і спирається на відрізок $[a,\ b]$. Таким чином, одержимо тіло обертання.

Перетин цього тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, є круг з радіусом $y=f(x)$. Отже, $S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$. Тоді, за формулою (12) матимемо:

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.} \quad (13)$$ – об'єм тіла обертання (вісь обертання Ox)

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x=\varphi(y)\ge 0$ і спирається на відрізок $[c,\ d]$, то об'єм тіла, утвореного обертанням цієї трапеції навколо осі Oy, аналогічно з формулою (13), рівний:

$$\boxed{V_y=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.} \quad (14)$$ - об'єм тіла обертання (вісь обертання Oy)

Приклад 6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи $y=x^2$ на проміжку $[1,\ 2]$ навколо осі: 1) Ox; 2) Oy.