Лекція №16

Змістовий модуль 3. Диференціальні рівняння.

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку.

п. 1.1. Основні поняття.

Озн. *Диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та похідну цієї функції y', тобто рівняння виду:

$$\boxed{F(x, y, y') = 0} \quad (1)$$

Зауваження. Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити y'.

Озн. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді:

$$\boxed{y' = f(x, y)} \quad (2)$$

і називають рівнянням першого порядку розв'язаним відносно похідної або *рівнянням в нормальній формі.*

Озн. *Розв'язком диференціального рівняння* на деякому інтервалі (a, b) називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння, обертає його на тотожність.

Наприклад, функція $y = x\ln x,\ x \in (0, +\infty)$, є розв'язком рівняння $xy' - x - y = 0$. Неважко переконатися, що розв'язком цього рівняння є також функція $y = x(\ln x + C)$, де C - довільна стала. Надаючи C довільних значень, дістанемо нескінченну множину розв'язків рівняння.

Озн. Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Теорема (про існування і єдність розв'язку). Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні в деякій області G і точка (x_0, y_0) належить цій області. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2), який задовольняє умову:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0) = y_0.$$

З геометричної точки зору теорема Коші стверджує, що через точку $(x_0, y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива.

Озн. Умову $y(x_0) = y_0$ (або $y|_{x=x_0} = y_0$) називають *початковою умовою*.

Озн. Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову, називається *задачею Коші*.

З погляду геометрії розв'язати задачу Коші – це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через т. (x_0, y_0).

Озн. Функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком диференціального рівняння, називається його *загальним розв'язком* в області G, якщо:

1) $\varphi(x, C)$ є розв'язком при будь-якому C;

2) для довільної т. $(x_0, y_0) \in G$ можна знайти C_0 таке, що $\varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Озн. *Частинним розв'язком* диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку при певному значенні сталої $C = C_0$.

Озн. Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді: $\Phi(x, y, C) = 0$, то він називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Зауваження. Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах.

п. 1.2. Рівняння з відокремлюваними змінними.

Озн. Рівняння виду $\boxed{y' = f(x)\cdot\varphi(y)}$, (3)
де $f(x)$ і $\varphi(x)$ - задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Розглянемо процес розв'язування рівняння (3).

$$y' = f(x)\cdot\varphi(y), \quad \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y), \quad dy = f(x)\cdot\varphi(y)dx,$$

$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$ - рівняння з відокремленими змінними.

Тоді: $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$.

Диференціальне рівняння (3) є окремим випадком рівняння:

$$\boxed{N_1(x)\cdot M_1(y)dx + N_2(x)\cdot M_2(y) = 0}$$

п. 1.3. Однорідні диференціальні рівняння.

Озн. Диференціальне рівняння $\boxed{y' = f(x,\ y)}$ (4) називається *однорідним*, якщо функція $f(x,\ y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто:

$$f(kx, ky) = f(x,\ y).$$

Зауваження. Однорідне диференціальне рівняння завжди можна записати у вигляді:

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Однорідне диференціальне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки:

$\boxed{u = \frac{y}{x}}$, де $u = u(x)$. Тоді $y = ux$, $\boxed{y' = u + u'x}$.

п. 1.4. Лінійні диференціальні рівняння.

Озн. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння виду:
$\boxed{y' + p(x)\cdot y = q(x),}$ (5) де $p(x)$ *і* $q(x)$ задані функції від x.

Розглянемо метод Бернуллі розв'язування рівняння (5).

За цим методом невідому функцію y шукають у вигляді добутку двох функцій, тобто:
$\boxed{y = uv}$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тоді $\boxed{y' = u'v + v'u}$.

Підставивши в рівняння (5), матимемо:
$u'v + v'u + p(x)uv = q(x)$, $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Функцію v будемо шукати таку, щоб вираз в дужках був рівний нулю. Тоді одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = f(x). \end{cases}$$

Розв'язуючи перше рівняння системи, знаходять функцію v, як частинний розв'язок цього рівняння при $C = 0$. Потім підставляють знайдену функцію v в друге рівняння системи і шукають функцію u, як загальний розв'язок цього рівняння. Тоді добуток знайдених u *і* v буде розв'язком рівняння (5).