Лекція №17

Тема 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.

п. 2.1. Основні поняття.

Озн. *Диференціальним рівнянням n-го порядку* називається рівняння виду:

$$\boxed{F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0}, \quad (1)$$

де x - незалежна змінна, $y = y(x)$ - невідома функція.

Озн. *Нормальним або явним диференціальним рівнянням n-го порядку* називається рівняння (1), розв'язане відносно $y(n)$, тобто рівняння виду:

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{n-1}\right)} \quad (2)$$

Озн. *Розв'язком рівняння* (2) називається n разів диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці її в рівняння обертає його на тотожність.

Озн. *Задача Коші або задача с початковими умовами*: серед усіх розв'язків рівняння (2) знайти такий розв'язок $y = \varphi(x)$, який при $x = x_0$ задовольняє такі умови:

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \ ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Існування і єдність розв'язку задачі Коші визначається теоремою, аналогічною до теореми з п. 1.1.

Оскільки розв'язок диференціального рівняння n-го порядку, в загальному випадку, знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому *загальний розв'язок рівняння* містить n довільних сталих, тобто має вигляд:

$$\boxed{y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).} \quad (3)$$

Якщо загальний розв'язок знаходиться в неявній формі:

$$\boxed{\Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0}, \quad (4)$$

то його називають *загальним інтегралом рівняння*.

Частинний розв'язок або частинний інтеграл знаходять із загального, якщо у співвідношенні (3) або (4) кожній довільній сталій $C_1, C_2, ..., C_n$ надати конкретного числового значення.

Розглянемо приклад рівняння n-го порядку, яке інтегрується в квадратурах. А саме:

$\boxed{y^{(n)} = f(x)}$, де $f(x)$ - задана неперервна функція.

Записавши це рівняння у вигляді:

$\dfrac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = f(x), \quad d\left(y^{(n-1)}\right) = f(x)dx$. Інтегруючи, дістанемо: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$.

Аналогічно: $d\left(y^{(n-2)}\right) = (\int f(x)dx + C_1)dx$. Звідки: $y^{(n-2)} = \int(\int f(x)dx)dx + C_1 x + C_2$.

Продовжуючи далі, після n інтегрувань знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \int(...\int(\int f(x)dx)dx...)dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + ... + C_n.$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} = \cos 2x$.

п. 2.2. Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку.

Одним із методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є метод пониження порядку. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку.

1. Нехай задано диференціальне рівняння виду:

$\boxed{F\left(x, \ y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., \ y^{(n)}\right) = 0}$, (1) яке не містить явно невідомої функції y.

Порядок такого рівняння можна понизити, якщо за нову невідому функцію $z = z(x)$ взяти найнижчу із похідних даного рівняння, тобто покласти:

$\boxed{y^{(k)} = z}$, де $z = z(x)$. Тоді $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$,..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$.

Тоді дістанемо рівняння:

$F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0$. Отже, порядок рівняння знижується на k одиниць.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 3y' = e^{2x}$.

2. Нехай задано диференціальне рівняння виду:

$\boxed{F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0}$, (2) яке не містить явно незалежної змінної x.

Рівняння (2) допускають пониження порядку на одиницю підстановкою:

$\boxed{y' = P}$, де $P = P(y)$. Тоді, за правилом диференціювання складеної функції:

$y'' = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dy} P = P'_y P$. Аналогічно дістанемо:

$y''' = \dfrac{d}{dx}\left(P'_y P\right) = \dfrac{d}{dy}\left(P'_y P\right)\dfrac{dy}{dx} = P(P''_{yy} P + \left(P'_y\right)^2)$.

В такий спосіб від рівняння n-го порядку переходять до рівняння $(n-1)$-го порядку.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $yy'' - 2\left(y'\right)^2 = 0$.