Лекція №18

Тема 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.

п. 3.1. Основні поняття.

Озн. Рівняння виду:

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + ... + a_n \cdot y = \varphi(x)}, \quad (1)$$

де $a_1(x), a_2(x),..., a_n(x), \varphi(x)$ - відомі функції, називається *лінійним диференціальним рівнянням* n*-го порядку.*

Озн. Якщо $\varphi(x) = 0$, то рівняння (1) називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням* (**ЛОДР**), якщо $\varphi(x) \neq 0$, то рівняння (1) називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням* (**ЛНДР**).

Отже, рівняння виду: $\boxed{y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0}$ (2)

є *лінійним однорідним рівнянням другого порядку*.

Очевидно, що функція $y = 0$ є розв'язком рівняння (2). Цей розв'язок називається *нульовим або тривіальним*. Надалі під задачею розв'язання однорідного диференціального рівняння розумітимемо задачу відшукання його нетривіальних розв'язків.

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ - розв'язки рівняння (2), то розв'язком цього рівняння є також функція: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Озн. Функції $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними*, якщо $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Якщо хоча б одне з чисел α_1 чи α_2 відмінне від нуля, а $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$, то $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ називаються *лінійно залежними.*

Озн. Якщо $y = y_1(x)$ *і* $y = y_2(x)$ - функції від x, то визначник $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ називається *визначником Вронського*.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - лінійно незалежні розв'язки рівняння (2) на проміжку (a, b), то визначник Вронського цих функцій в жодній точці даного проміжку не дорівнює нулю.

Теорема 3. (Теорема про структуру розв'язку ЛОДР 2-го порядку). Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - лінійно незалежні на проміжку (a, b)розв'язки рівняння $y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0$, то $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де C_1, C_2 - довільні сталі, є його загальним розв'язком.

п. 3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку.

Нехай дано лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку, тобто рівняння:

$$\boxed{y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = f(x)}. \quad (3)$$

Озн. Рівняння $\boxed{y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0}$ (4) будемо називати *відповідним до рівняння (3) однорідним рівнянням.*

Теорема 4 (про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння). Загальним розв'язком ЛНДР (3) є сума його довільного частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (4).

Доведення:

Введемо такі позначення: y^* - частинний розв'язок рівняння (3),

$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - загальний розв'язок рівняння (4).

Доведемо, що $y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x)$ - розв'язок рівняння (3). Для цього підставимо цю функцію в рівняння (3) і покажемо, що вона задовольняє це рівняння.

$$y^{*'} + \overline{y}'' + a_1(y^{*'} + \overline{y}') + a_2(y^* + \overline{y}) = (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) + (\overline{y}'' + a_1 \overline{y}' + a_2 \overline{y}) = f(x) + 0 = f(x).$$

Доведемо, що $y(x)$ - загальний розв'язок рівняння (3). Для цього доведемо, що з $y(x)$ можна дістати розв'язок рівняння (3), який задовольняє задані початкові умови:

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0'.$$

$y(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+y^*(x_0)=y_0$,

$y'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+y^{*'}(x_0)=y_0'$, де C_1, C_2 - невідомі.

Отже, маємо систему лінійних рівнянь з двома невідомими C_1, C_2. Визначник цієї системи є визначником Вронського $W(x_0)\neq 0$, оскільки y_1 і y_2 - лінійно незалежні. Отже, система має єдиний розв'язок, який відповідає заданим початковим умовам. Отже:

$$\boxed{y(x)=y^*(x)+\overline{y}(x)}. \quad (5)$$

п. 3.3. Метод варіації довільних сталих.

Нехай $\overline{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ - загальний розв'язок ЛОДР, що відповідає ЛНДР (3).

Замінимо сталі C_1 *і* C_2 невідомими функціями $C_1(x)$ *і* $C_2(x)$ і підберемо ці функції так, щоб функція: $y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ була розв'язком рівняння (3).

Можна показати, що функція $y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ буде частинним розв'язком рівняння (3), коли $C_1(x)$ *і* $C_2(x)$ задовольнятимуть систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0; \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Визначник основної матриці цієї системи є визначником Вронського $W(x)$для функцій $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$. Оскільки функції $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ - лінійно незалежні, то $W(x)\neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок: $C_1'=\varphi(x)$ та $C_2'=\phi(x)$. Інтегруючи функції $\varphi(x)$ *і* $\phi(x)$, знайдемо $C_1'(x)$ *і* $C_2'(x)$. За формулою (5) складають загальний розв'язок ЛНДР.

п. 3.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Озн. Рівняння $\boxed{y''+a_1y'+a_2y=0}$, (1) де a_1 *і* a_2 - дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Озн. *Характеристичним рівнянням рівняння* (1) називається рівняння виду:

$$\boxed{\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0} \quad (2)$$

Нехай λ_1 *і* λ_2 - розв'язки рівняння (2). Тоді можливі такі випадки.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $\boxed{\lambda_1\neq\lambda_2}$.

У цьому випадку частинними лінійно-незалежними розв'язками рівняння (1) є функції:

$$y_1=e^{\lambda_1 x} \quad i \quad y_2=e^{\lambda_2 x}.$$

Тоді, за теоремою 4 : $\boxed{y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}}$ - загальний розв'язок рівняння (1).

2. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні: $\boxed{\lambda_1=\lambda_2=\lambda}$.

У цьому випадку частинними лінійно-незалежними розв'язками рівняння (1) є функції:

$$y_1=e^{\lambda x} \quad i \quad y_2=xe^{\lambda x}.$$

Тоді, за теоремою 4 : $\boxed{y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}}$ - загальний розв'язок рівняння (1).

3. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені: $\boxed{\lambda_1=\alpha+\beta i, \quad \lambda_2=\alpha-\beta i}$.

У цьому випадку частинними лінійно-незалежними розв'язками рівняння (1) є функції:

$$y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x \quad i \quad y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Тоді, за теоремою 4 : $\boxed{y=C_1e^{\alpha x}\sin\beta x+C_2e^{\alpha x}\cos\beta x}$ - загальний розв'язок рівняння (1).