Лекція №1

Змістовий модуль 1. Рівняння математичної фізики

Тема 1. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є.

п. 1.1. Періодичні функції. Періодичні процеси.

У процесі вивчення різноманітних періодичних процесів, тобто процесів, які повторюються через певний проміжок часу, доцільно розкладати періодичні функції, що описують ці процеси, не в степеневий ряд, а в так званий тригонометричний ряд.

Озн. Функція $y = f(x)$, яку визначено на множині D, називається *періодичною з періодом* $T > 0$, якщо при кожному $x \in D$ значення $(x+T) \in D$ і виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

Для побудови графіка періодичних функцій періоду T достатньо побудувати його на довільному відрізку довжини T і періодично продовжити на всю область визначення функції.

Наведемо деякі **властивості періодичних функцій**, які будемо використовувати в подальшому.

1. Алгебраїчна сума періодичних функцій, що мають один і той самий період T, є періодична функція з періодом T.

2. Якщо функція $f(x)$ має період T, то функція $f(kx)$, $k = const$ має період $\frac{T}{k}$.

Дійсно: $f\left(k \cdot \left(x + \frac{T}{k}\right)\right) = f(kx+T) = f(kx)$.

3. Якщо функція $f(x)$ має період T і інтегрована, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)dx$ для довільних a і b.

Озн. Найпростішим періодичним процесом є *просте гармонічне коливання*, яке описується функцією:

$$\boxed{y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}, \qquad \textbf{(*)}$$

$t \geq 0$, де A- амплітуда коливань, ω - циклічна частота, φ_0- початкова фаза. Функцію такого виду називають *простою гармонікою*.

Основним періодом функції (*) є $T = \frac{2\pi}{\omega}$, тобто одне повне коливання здійснюється за проміжок часу $\frac{2\pi}{\omega}$. Отже, циклічна частота ω - кількість коливань протягом 2π одиниць часу.

Перетворимо функцію (*):

$$\boxed{y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t},$$

де $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$. Звідси випливає, що просте гармонічне коливання описується періодичними функціями $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$.

Навпаки, якщо $y = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, то це проста гармоніка.

Дійсно

$$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t\right) = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

де $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Коливання, утворене внаслідок накладання кількох простих гармонік, називається складним гармонічним коливанням.

Виникає питання: чи будь-яку періодичну функцію, що описує періодичний процес, можна представити у вигляді суми простих гармонік виду (*)? Якщо так, то як знайти невідомі параметри (коефіцієнти) кожної з цих гармонік?

п. 1.2. Тригонометричний ряд Фур'є.

Озн. *Тригонометричним рядом Фур'є* або просто рядом Фур'є називається функціональний ряд виду:

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,} \quad (1)$$

де дійсні числа $a_0,\ a_n, b_n\ (n=1,2,\ldots)$ називаються коефіцієнтами ряду.

Ряд (1) можна записати у вигляді (див. п.1.1):

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n)}.$$

Тут $A_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}$, $a_n=A_n\sin\varphi_n$, $b_n=A_n\cos\varphi_n$.

Наведемо формули які будемо використовувати в подальшому. Нехай $m=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots$.

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0$;

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0$;

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n.\end{cases}$;

4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx=0$;

5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n.\end{cases}$.

Нехай функція $f(x)$ - довільна періодична функція з періодом $T=2\pi$. Припустимо, що $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, тобто $f(x)$ є сумою ряду (1):

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx} \quad (2)$$

Оскільки функція $f(x)$ має період 2π, то її можна розглядати в довільному проміжку довжини 2π. В якості основного проміжку виберемо відрізок $[-\pi;\pi]$ і припустимо, що ряд (2) можна почленно інтегрувати на цьому відрізку. Обчислимо коефіцієнти $a_n,\ b_n$. Для цього проінтегруємо обидві частини рівності (2) в межах від $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx=\pi a_0.$$

Звідси:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx} \quad (3)$$

Помножимо обидві частини рівності (2) на $\cos mx$ і проінтегруємо обидві частини рівності в межах від $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mxdx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mxdx\right).$$

З останньої рівності при $m=n$ одержимо: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi$.

Звідси:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx} \qquad (4)$$

Аналогічно, помноживши обидві частини рівності (2) на $\sin mx$ і проінтегрувавши обидві частини рівності в межах від $-\pi$ до π, матимемо:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx} \qquad (5)$$

Отже, для інтегрованої на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ можна записати:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx, \quad (6)$$

де коефіцієнти a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ обчислюються за формулами 3, 4, 5. Тоді кажуть, що функції $f(x)$ поставлений у відповідність її ряд Фур'є. Якщо ряд Фур'є збіжний, то його суму позначимо через $S(x)$.

п. 1.3. Розклад в ряд Фур'є 2π-періодичних функцій. Теорема Діріхле.

З'ясуємо умови, при яких знак $\approx$ в співвідношенні (6) можна замінити знаком =, тобто умови, при яких ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається і має своєю сумою функцію $f(x)$.

Теорема Діріхле. Нехай 2π-періодична функція $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ задовольняє такі умови:

1) $f(x)$ - кусково-неперервна (неперервна або має скінченне число точок розриву 1-го роду);
2) $f(x)$ - кусково-монотонна (монотонна на всьому відрізку або цей відрізок можна розбити на скінченне число інтервалів так, що на кожному з них функція монотонна).

Тоді відповідний функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається на цьому відрізку і при цьому:

1) сума ряду $S(x) = f(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$;
2) сума ряду $S(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, якщо x_0 - точка розриву;
3) $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Отже, якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле, то на відрізку $[-\pi;\pi]$ має місце розклад:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx, \\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n=1,2,... \ . \end{gathered}} \qquad (6)$$

Ця рівність може порушуватися лише на кінцях відрізку $[-\pi;\pi]$ або в точках розриву функції.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом 2π, задану на відрізку $[-\pi;\pi]$ формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x\in[0;\pi), \\ -x, & x\in[-\pi;\,0). \end{cases}$$