Лекція №2

п. 1.4. Розклад в ряд в Фур'є парних і непарних функцій.

Якщо функція $f(x)$, що розкладається в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$, є парною чи непарною, то це відображується на формулах коефіцієнтів Фур'є і на вигляді самого ряду (він стає так званим неповним).

Зауваження. Як відомо, якщо функція $f(x)$ інтегрована на симетричному відрізку $[-a;a]$, то:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx,\ \text{якщо } f(x) \text{ - парна функція,}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,\ \text{якщо } f(x) \text{ - непарна функція.}$$

Враховуючи той факт, що:

1) коли $f(x)$ - парна функція, то $f(x)\cos nx$ - парна, а $f(x)\sin nx$ - непарна;
2) коли $f(x)$ - непарна функція, то $f(x)\cos nx$ - непарна, а $f(x)\sin nx$ - парна,

матимемо наступні висновки.

Якщо функція $f(x)$ - **парна** на відрізку $[-\pi;\pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx},\quad \text{де}\quad \boxed{a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx}. \qquad (7)$$

Якщо функція $f(x)$ - **непарна** на відрізку $[-\pi;\pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx},\qquad \text{де}\qquad \boxed{b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx}. \qquad (8)$$

Ряди (7) і (8) називаються неповними тригонометричними рядами, або рядами за косинусами (7) та за синусами (8).

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x,\ \ x\in[-\pi;\pi],\ T=2\pi$.

п. 1.5. Розклад в ряд в Фур'є функцій довільного періоду.

Розкладати в ряд Фур'є можна і періодичні функції з періодом, відмінним від 2π.

Нехай функція $f(x)$, визначена на відрізку $[-l;l]$ має період $2l$ і задовольняє на цьому відрізку умовам теореми Діріхле.

Зробивши підстановку $x=\dfrac{l}{\pi}t$, дану функцію $f(x)$ перетворимо в функцію $\varphi(t)=f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)$, визначена на відрізку $[-\pi;\pi]$ і має період $T=2\pi$.

Дійсно, якщо $t=-\pi$, то $x=-l$, якщо $t=\pi$, то $x=l$ і при $-\pi<t<\pi$ маємо $-l<x<l$ і $\varphi(t+2\pi)=f\left(\dfrac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\dfrac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)=\varphi(t)$, тобто $\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)$.

Розклад функції $\varphi(t)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$ має вигляд:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt,\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt,\quad n=1,2,\ldots\ .$$

Повертаючись до змінної x і враховуючи, що $t=\dfrac{\pi x}{l}$, $dt=\dfrac{\pi}{l}dx$, одержимо:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l},$$
$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n=1,2,\ldots\ . \tag{9}$$

Ряд (9) називається рядом Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $T=2l$.

Зауваження. Всі теореми, що мають місце для рядів Фур'є 2π - періодичних функцій, залишаються справедливими і для рядів Фур'є функцій, період яких $T=2l$. Зокрема,

якщо $f(x)$ **парна** на відрізку $[-l;\,l]$, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},$$
$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n=1,2,\ldots\ . \tag{10}$$

якщо $f(x)$ **непарна** на відрізку $[-l;\,l]$, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l},$$
$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n=1,2,\ldots\ . \tag{11}$$

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x,\ \ x\in(-4;\,4)$.

п. 1.6. Представлення неперіодичної функції рядом Фур'є.

Нехай $y=f(x)$ - неперіодична функція, задана на всій числовій осі $(-\infty<x<\infty)$.

Така функція не може бути розкладена в ряд Фур'є, оскільки сума ряду Фур'є є функція періодична, а тому не може бути рівна $f(x)$ для всіх x.

Однак, неперіодична функція $f(x)$ може бути представлена у вигляді ряду Фур'є на довільному скінченному проміжку $[a;\,b]$, на якому вона задовольняє теорему Діріхле. Для цього можна помістити початок координат в середину відрізка $[a;\,b]$ і побудувати функцію $f_1(x)$ періоду $T=2l=|b-a|$ таку, що $f_1(x)=f(x)$ при $-l\le x\le l$.

Розкладаємо функцію $f_1(x)$ в ряд Фур'є. Сума цього ряду в усіх точках відрізку $[a;\,b]$ (крім точок розриву) співпадає з заданою функцією $f(x)$. Ззовні цього відрізку сума ряду і $f(x)$ є зовсім різними функціями.

Нехай тепер неперіодичну функцію $f(x)$ потрібно розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[0;\,l]$. Таку функцію можна довільним чином довизначити на відрізку $[-l;\,0]$, а потім періодично її продовжити з періодом $T=2l$. Розклавши в ряд Фур'є на відрізку $[-l;\,l]$ одержану в такий спосіб періодичну функцію $f_1(x)$ знайдемо шуканий ряд для функції $f(x)$ при $x\in[0;\,l]$.

Зокрема, функцію $f(x)$ можна довизначити на відрізку $[-l;\,0]$ парним чином. В цьому випадку функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є за косинусами. Якщо ж функцію $f(x)$ продовжити на відрізок $[-l;\,0]$ непарним чином, то вона розкладається в ряд Фур'є за синусами.

Приклад 3. Розкласти функцію $f(x)=2x-1,\quad 0<x<2$ в ряд Фур'є за синусами.

п. 1.7. Комплексна форма ряду Фур'є.

Ряди Фур'є часто застосовуються в комплексній формі запису. Для того, щоб перетворити ряд і його коефіцієнти в комплексну форму, використаємо формули Ейлера:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Звідси: $\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$

Тоді: $\cos nx=\dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\quad \sin nx=\dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}.$

Підставивши ці вирази в ряд Фур'є матимемо:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx},\qquad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx,\quad n=0;\pm1;\pm2;....}\qquad(12)$$

Ряд (12) називається *комплексною формою ряду Фур'є* функції $f(x)$, а числа c_n - *комплексними коефіцієнтами ряду Фур'є.*

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l;l]$, то комплексна форма її ряду Фур'є має вигляд:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},\qquad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ \dots\ .}\qquad(13)$$

В технічних дисциплінах члени ряду $c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ називаються комплексними гармоніками, коефіцієнти c_n - комплексними амплітудами гармонік, а числа $\omega_n=\dfrac{\pi n}{l}$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ - хвильовими числами функції $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}$.

Сукупність величин $\{c_1,c_2,...,c_n,...\}$ називаються амплітудним спектром. Графічно амплітудний спектр зображується у вигляді вертикальних відрізків довжиною c_n, розташованих в точках $\omega_n=\dfrac{n\pi}{l}$ числової осі.

Приклад 4. Побудувати ряд Фур'є в комплексній формі для 2-періодичної функції:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1;0),\\ 1, & x\in[0;1].\end{cases}\qquad T=2.$$