# Лекція №3

**п. 1.8. Інтеграл Фур'є.**

Як відомо, будь-яку (періодичну чи неперіодичну) функцію $f(x)$, яка задовольняє на відрізку $[-l;l]$ умовам теореми Діріхле, можна розкласти в ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x, \qquad \text{де } \omega_n=\frac{\pi n}{l}, \qquad (1)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad (n=0,1,2,...),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad (n=1,2,...). \qquad (2)$$

Цей розклад буде справедливим на всій числовій осі $Ox$ в тому випадку, коли $f(x)$ - періодична функція з періодом $T=2l$.

Розглянемо випадок, коли $f(x)$ - неперіодична функція, задана на нескінченному проміжку $(-\infty;\infty)$, тобто $l=+\infty$.

Будемо вважати, що на довільному скінченному проміжку $[-l;l]$ функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле і збігається наступний невласний інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=M<\infty .$$

В такому випадку говорять, що $f(x)$ - абсолютно інтегрована на всій числовій осі.

Підставляючи в ряд (1) значення коефіцієнтів $a_n$ і $b_n$ одержимо:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)(\cos\omega_n t\cdot\cos\omega_n x+\sin\omega_n t\cdot\sin\omega_n x)dt, \quad \text{отже}$$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)dt. \qquad (3)$$

Будемо тепер необмежено збільшувати $l$. Перший доданок в правій частині рівності при $l\to\infty$ прямує до нуля, оскільки:

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\right|\le\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt\le\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\frac{M}{2l}\to 0 .$$

Розглянемо другий доданок в рівності (3). Величина $\omega_n=\frac{n\pi}{l}$ приймає значення $\omega_1=\frac{\pi}{l}$, $\omega_2=\frac{2\pi}{l}$, $\omega_3=\frac{3\pi}{l}$, ..., що утворюють арифметичну прогресію з різницею $\Delta\omega_n=\frac{\pi}{l}$. При цьому $\Delta\omega_n\to 0$ при $l\to\infty$. Тоді:

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)dt\cdot\frac{\pi}{l}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)dt\right)\Delta\omega_n=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\cdot\Delta\omega_n,$$

де $\varphi(\omega_n)=\int_{-l}^{l}f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)dt$, $\omega_n=\frac{\pi}{l},\frac{2\pi}{l},...,\frac{n\pi}{l},...$ .

Одержана сума є інтегральною сумою для функції $\varphi(\omega)=\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega(t-x)dt,\ \ \omega\in(0;+\infty)$.

Отже, переходячи в рівності (3) до границі при $l\to\infty$, матимемо: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\omega)d\omega$. Або:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt.}\qquad(4)$$

Формула (4) називається *формулою Фур'є,* а інтеграл в правій частині формули – *інтегралом Фур'є* для функції $f(x)$.

Формулу (4) можна переписати в іншому вигляді:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)(\cos\omega t\cos\omega x+\sin\omega t\sin\omega x)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega tdt\cdot\cos\omega x+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega tdt\cdot\sin\omega x\right).$$

Отже, $$\boxed{f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega},\quad(5)$$

де $$\boxed{A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega tdt,\qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega tdt}.\qquad(6)$$

*Зауваження.* Якщо функція $f(x)$ - **парна**, то формула приймає вигляд:

$$\boxed{f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega xd\omega},\quad \text{де}\ \boxed{A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega tdt.}\qquad(7)$$

Якщо функція $f(x)$ - **непарна**, то формула приймає вигляд:

$$\boxed{f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega xd\omega},\quad \text{де}\ \boxed{B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}f(t)\sin\omega tdt.}\qquad(8)$$

Формули (7) і (8) можна переписати у симетричній формі.

1) у випадку **парної** функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega xd\omega,}\qquad \text{де}\qquad \boxed{F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega tdt.}\qquad(9)$$

2) у випадку **непарної** функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}F_s(\omega)\sin\omega xd\omega,}\qquad \text{де}\qquad \boxed{F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}f(t)\sin\omega tdt.}\qquad(10)$$

Функції $F_c(\omega)$ *і* $F_s(\omega)$ називаються відповідно **косинус-перетворенням** і **синус-перетворенням Фур'є** для функції $f(x)$.

**Інтеграл Фур'є в комплексній формі** має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\ .$$

Або в симетричній формі:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega,} \quad (11) \qquad \text{де} \quad \boxed{F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt} \qquad (12)$$

При цьому функція $F(\omega)$ називається **перетворенням Фур'є для функції** $f(x)$. Тоді $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega$ називається **оберненим перетворенням Фур'є**.

**Приклад.** Представити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\in(0;+\infty), \\ 0, & x=0, \\ -e^{x}, & x\in(-\infty;0). \end{cases}$$

Використовуючи одержаний результат знайдіть значення невласного інтеграла $\int_{0}^{\infty}\frac{y\sin y}{1+y^2}dy$.