Лекція №4

Тема 2. Рівняння математичної фізики.

п. 2.1. Канонічні форми та класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Озн. *Загальним лінійним рівнянням з частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними* називається рівняння виду:

$$\boxed{a_{11}u''_{xx}+2a_{12}u''_{xy}+a_{22}u''_{yy}+a_{01}u'_x+a_{02}u'_y+a_{00}u=f(x,y),} \qquad (*)$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{01}, a_{02}, a_{00}$, $f(x, y)$ - задані функції від x і y,
$u(x, y)$ - невідома функція.

Озн. Якщо $f(x,y)=0$, то рівняння (*) називається *однорідним*, в іншому випадку - *неоднорідним*. Якщо a_{ij} - сталі, то рівняння (*) називається лінійним рівнянням *із сталими коефіцієнтами.*

Тип рівняння (*) встановлюють відповідно до типу квадратичної форми $F(t_1, t_2)$, яку складено за рівнянням: $F(t_1, t_2)=a_{11}t_1^{\ 2}+2a_{12}t_1t_2+a_{22}t_2^{\ 2}$.

А саме, рівняння (*) має в точці $M_0(x_0, y_0)$:

1) *еліптичний тип*, якщо

$$\Delta(x_0,\ y_0)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^{\ 2}>0;$$

2) *гіперболічний тип*, якщо $\Delta(x_0,\ y_0)<0$;

3) *параболічний тип*, якщо $\Delta(x_0,\ y_0)=0$.

Озн. Рівняння (*) називається *зведеним до канонічного вигляду*, якщо в запису цього рівняння коефіцієнт біля мішаної похідної дорівнює нулю $(a_{12}=0)$, а коефіцієнти біля похідних u''_{xx}, u''_{yy} рівні нулю або ± 1.

Озн. Диференціальне рівняння

$$\boxed{a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0} \qquad (**)$$

називається *характеристичним рівнянням* рівняння (*).

Інтеграли рівняння (**) називаються *характеристиками*.

п. 2.2. Метод характеристик зведення загального диференціального рівняння до канонічного вигляду.

Метод характеристик зведення загального диференціального рівняння (*) до канонічного вигляду полягає у наступному.

Спочатку знаходять загальні інтеграли рівняння (**), тобто характеристики.

Якщо $\varphi(x, y)=C_1$ - загальний інтеграл рівняння (**), то робимо заміну $\boxed{\varphi(x, y)=\alpha}$. Якщо $\phi(x, y)=C_2$ - другий загальний інтеграл рівняння (**), незалежний з $\varphi(x, y)$, то $\boxed{\phi(x, y)=\beta}$.

Тепер, замінюючи в (*) змінні x і y на α і β одержимо знову лінійне рівняння, але канонічного вигляду. При цьому при знаходженні похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ функцію $u(x, y)$ вважають складеною функцією з проміжними змінними α і β і кінцевими змінними x і y, тобто $u(\alpha(x, y),\ \beta(x, y))$.

Зауваження. Варто зазначити, що характеристичне рівняння

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

можна записати у вигляді:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right)+a_{22}=0.$$

Це рівняння є квадратним відносно $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{{a_{12}}^2-a_{11}a_{12}}}{a_{11}}.$$

Можливі три випадки.

1. Якщо ${a_{12}}^2-a_{11}a_{22}>0$, то інтеграли характеристичного рівняння $\varphi(x,y)=C_1$ та $\phi(x,y)=C_2$ - дійсні і різні. Шляхом підстановки $\boxed{\varphi(x,y)=\alpha}$ і $\boxed{\phi(x,y)=\beta}$ рівняння (*) зводиться до вигляду:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=f_1\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)}. \quad (1)$$

Це є рівняння гіперболічного типу, оскільки $\Delta<0$.

Якщо покласти $\xi=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\eta=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, то рівняння (1) приймає канонічний вигляд:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=f_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)} \quad (2)$$

2. Якщо ${a_{12}}^2-a_{11}a_{22}<0$, то інтеграли характеристичного рівняння $\varphi(x,y)=C_1$ та $\phi(x,y)=C_2$ - комплексно спряжені (відрізняються лише знаком уявної частини). Шляхом підстановки $\boxed{\alpha=\frac{\varphi+\phi}{2}}$ і $\boxed{\beta=\frac{\varphi-\phi}{2i}}$ рівняння (*) зводиться до вигляду:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=f_1\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)}. \quad (3)$$

Це рівняння еліптичного вигляду, оскільки $\Delta>0$.

3. Якщо ${a_{12}}^2-a_{11}a_{22}=0$, то маємо тільки одну характеристику $\varphi(x,y)=C$. В якості функції $\phi(x,y)$ можна взяти довільну функцію двох змінних, яка є незалежною з $\varphi(x,y)$, тобто таку, що

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Шляхом підстановки $\boxed{\varphi(x,y)=\alpha}$ і $\boxed{\phi(x,y)=\beta}$ рівняння (*) зводиться до вигляду:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=f_1\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)}. \quad (4)$$

Це рівняння параболічного вигляду, оскільки $\Delta=0$.

п. 2.3. Основні рівняння математичної фізики.

1. $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ **- хвильове рівняння**

2. $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ **- рівняння теплопровідності**

3. $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$ **- рівняння Лапласа**