Лекція №5

п. 2.3. Вивід рівняння коливань обмеженої струни.

Струною називають тонку нитку, яка може вільно згинатися та працює тільки на розтяг.

Нехай кінцеві точки струни жорстко закріплені, а сама струна туго натягнута. Якщо вивести струну з положення рівноваги (відтягнути її або вдарити по ній), то струна почне коливатися. Будемо передбачати, що всі точки струни рухаються перпендикулярно її положенню рівноваги (поперечні коливання), при цьому в кожен момент часу струна лежить в одній і тій самій площині.

Виберемо систему координат так, щоб вісь абсцис Ox співпадала з положенням рівноваги струни. Нехай u - відхилення струни від положення рівноваги. Тоді під час коливань u - функція абсциси точки струни x і моменту часу t: $u=u(x,\ t)$.

Тоді $\dfrac{\partial u}{\partial x}=u'_x(x,t)$ - кутовий коефіцієнт дотичної в т. x;

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=u'_t(x,t)$ - швидкість руху струни в т. x;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=u''_t(x,t)$ - прискорення руху струни в т. x.

При сталому x функція $u=u(x,\ t)$ дає закон руху т. x вдовж прямої $\parallel Ou$.

Складемо рівняння коливань струни.

Нехай передбачається, що:

1) струна є абсолютно гнучкою (якщо видалити частину струни, що лежить по один бік від якої-небудь її точки, то сила натягу T, яка замінює дію видаленої частини, завжди буде напрямлена по дотичній до струни);

2) струна пружна і підкоряється закону Гука – зміна величини сили натягу пропорційна зміні довжини струни;

3) струна однорідна з лінійною густиною ρ;

4) на струну в площині коливань діють сили паралельні осі Ou, які можуть змінюватися вздовж струни с часом. Сили ці неперервно розподілені вздовж струни. Густина розподілу цих сил - $g(x,t)$. Якщо єдиною зовнішньою силою є вага струни, то $g(x,t)=-\rho g$.

5) силами опору середовища нехтуємо.

Будемо вивчати тільки малі коливання, тобто $\alpha^2\approx 0$,
де $\alpha(x,t)$ - кут між Ox і T в т. x в момент t.

Тоді $\sin\alpha\approx\alpha,\quad \cos\alpha\approx 1$, оскільки $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\approx\dfrac{\alpha^2}{2},\ \cos\alpha\approx 1$.

$tg\alpha\approx\sin\alpha\approx\alpha$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=tg\alpha$. Тоді $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\approx 0$.

$$M_1M_2=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx=x_2-x_1=dx.$$

Отже, в процесі коливань ми можемо знехтувати змінами довжини частини струни.

Спроектуємо на вісь Ox:

Ox: $-T_1\cos\alpha_1+T_2\cos\alpha_2=0$. Тоді $T_1=T_2=T_0$.

Отже, сили натягу в усіх точках струни рівні між собою.
Оскільки нехтуємо змінами довжини струни, то за законом
Гука сили натягу не змінюються і з часом.

Спроектуємо на вісь Ou:

$Ou: \quad -T_0 \sin\alpha_1 + T_0 \sin\alpha_2 = T_0(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).$

$\sin\alpha_2 = tg\alpha_2 = u'_x(x + dx.\, t),$

$\sin\alpha_1 = tg\alpha_1 = u'_x(x,\, t).$

$$T_0(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T_0(u'_x(x + dx, t) - u'_x(x,\, t)) = T_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx\,.$$

Тут частинний приріст похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$ ми замінили її частинним диференціалом $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$.

$\overline{F}$ – рівнодійна зовнішніх сил, прикладених к $M_1 M_2$ в момент часу t.

В силу малості $M_1 M_2$ будемо розглядати його як матеріальну точку.

$$\overline{F} \approx g(x,\, t) \cdot |M_1 M_2| \approx g(x,\, t) dx\,.$$

$$m = \rho \cdot |M_1 M_2| = \rho \cdot dx\,.$$

Тоді $\rho \cdot dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x,\, t) dx$.

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \cdot g(x,\, t)}$$ (1) – одновимірне хвильове рівняння

Тут $a^2 = \frac{T_0}{\rho} = const$ - додатна стала величина.

Якщо $g(x,\, t) = 0$, то рівняння (1) називається однорідним і описує вільні коливання струни без дії зовнішніх сил.

Процес пересування відхилення по струні називають хвилею. При цьому $a = \frac{T_0}{\rho}$ - швидкість розповсюдження хвилі.